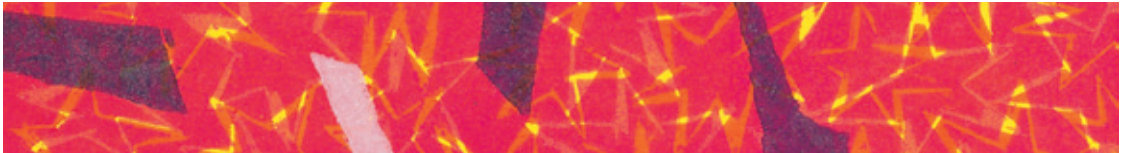
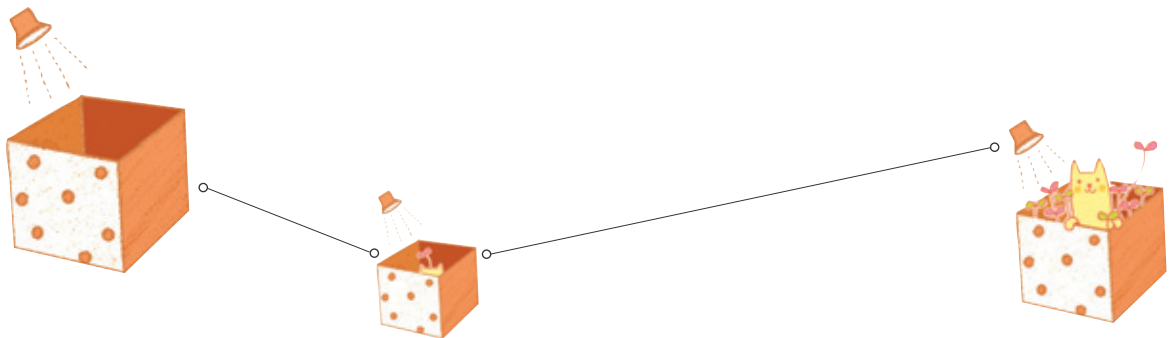
고 등 학 교

수학의 활용 익힘책

이강섭 | 왕규채 | 송교식 | 양인웅

㈜지학사

들 어 가 는 말

학습은 배우고(學) 익히는(習) 것입니다. 모든 교과가 그렇지만 특히, 수학 학습에서는 익힘이 중요합니다. 그동안 우리의 수학교육에서는 익힘보다는 배움을 위주로 하였습니다. 학습자 개개인의 차이가 있음에도 불구하고 단일 수업의 가르침과 배움만이 있었습니다. 그러나 다행스럽게도 개정 교육과정에서는 배움과 익힘의 양 날개로 효율적인 수학 학습의 토대를 마련하였습니다.

이 익힘책은 교과서 본 책에서 배운 수학적 지식과 기능을 학습자의 수준에 따라 스스로 익혀, 자연과 사회의 여러 가지 현상을 수학적으로 고찰하고 주어진 문제를 합리적으로 해결하는 능력을 기르도록 저술하였습니다.

이를 위하여 각 소단원별로 바탕 다지기, 기본 익히기, 실력 키우기의 문제를 제공하여 수준별 자기 주도적 학습이 가능하도록 하였습니다. 또, 흥미롭고도 효율적인 학습을 위하여 읽기 자료, 공학 도구, 프로젝트, 실생활 문제 해결하기, 실생활 이야기, 수학자 이야기 등을 곳곳에 수록하였습니다. 반복 연습 또는 문제 풀이가 지루하다고 느낄 때, 이러한 코너에서 시원함을 느끼고 새로운 시야를 확보하기 바랍니다.

수영 선수는 1초를 단축하기 위하여 수천, 수만 시간을 훈련합니다. 피겨 스케이팅 선수도 몇 분간의 연기를 위하여 수천, 수만 시간을 얼음판 위에서 보냅니다. 사진작가는 단 한 장면을 포착하기 위하여 수천 장의 필름을 사용합니다. 화가의 한 작품 뒤에는 수천 장의 데생과 수없는 불면의 밤이 있습니다. 아무런 연습 없이, 끊임없는 익힘 없이 소정의 성과를 거둘 수는 없습니다. 이것은 수학 학습에서도 마찬가지입니다.

이 책으로 수학을 학습하는 여러분이 모두 수학자가 되기를 원하지는 않습니다. 여러분의 대다수는 수학 이외의 분야로 진학하고 진출할 것입니다. 그러나 여러분이 어떤 분야를 선택하더라도 수학 학습에서 배우고 익힌 것은 여러분의 발전의 토대가 될 것이고, 앞날의 등대가 될 것입니다. 이 책을 통하여 여러분의 사고력과 문제 해결력, 창의력을 증진시켜 행복한 삶을 누리기 바랍니다.

지은이 씀

차 례 CONTENTS

I 명제와 논리

II 지수와 로그

III 수열

확률과 통계

도형과 그래프

부록*

이 책의 구성

이 책은 2007년 개정 교육과정의 정신을 반영하여, 학생들의 적성과 능력에 맞추어 자기 주도적 학습에 적합하도록 구성하였다. 특히, 교과서와의 연계를 긴밀히 하여 다양한 형태의 학습이 가능하도록 하였으며, 학습자의 사고력, 창의력, 의사소통 능력을 기를 수 있도록 쉽고 재미있게 구성하였다.

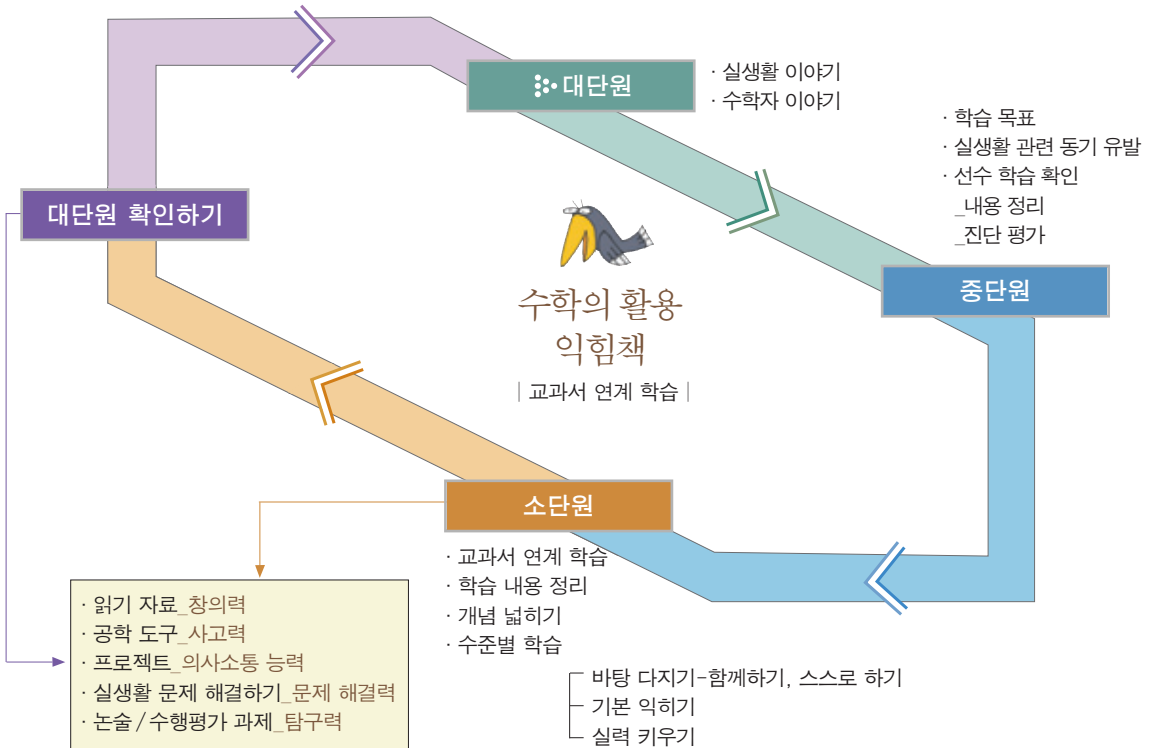
수학의 활용 익힘책

| 교과서 연계 학습 |

대단원
- 실생활 이야기
- 수학자 이야기

중단원
- 학습 목표
- 실생활 관련 동기 유발
- 선수 학습 확인
  - _내용 정리
  - _진단 평가

소단원
- 교과서 연계 학습
- 학습 내용 정리
- 개념 넓히기
- 수준별 학습
  - 바탕 다지기-함께하기, 스스로 하기
  - 기본 익히기
  - 실력 키우기

대단원 확인하기
- 읽기 자료_창의력
- 공학 도구_사고력
- 프로젝트_의사소통 능력
- 실생활 문제 해결하기_문제 해결력
- 논술/수행평가 과제_탐구력

| 단원 도입 및 선수 학습 |

실생활 이야기

학습의 실마리가 되는 생활 소재를 만화 및 사진으로 구성하여 학습 주제에 쉽고 재미있게 다가서도록 하였다.

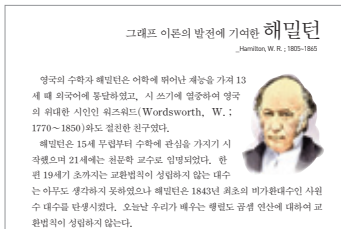
수학자 이야기

대단원 학습에 관련된 수학자의 업적과 일화를 소개하여 학습의 흥미를 높이도록 하였다.

그래프 이론의 발전에 기여한 해밀턴

_Hamilton, W. R. ; 1805~1865

영국의 수학자 해밀턴은 어학에 뛰어난 재능을 가져 13세 때 외국어에 통달하였고, 시 쓰기에 열중하여 영국의 위대한 시인인 워즈워드(Wordsworth, W. ; 1770~1850)와도 절친한 친구였다.

해밀턴은 15세 무렵부터 수학에 관심을 가지기 시작했으며 21세에는 천문학 교수로 임명되었다. 한편 19세기 초까지는 교환법칙이 성립하지 않는 대수는 아무도 생각하지 못하였으나 해밀턴은 1843년 최초의 비가환대수인 사원수 대수를 탄생시켰다. 오늘날 우리가 배우는 행렬도 곱셈 연산에 대하여 교환법칙이 성립하지 않는다.

~에 들어가기 전에

중단원 학습에 필요한 선수 학습의 내용 정리와 함께 진단 평가 문항을 제시하였다.

도형과 그래프에 들어가기 전에

1. 다각형과 다면체의 뜻

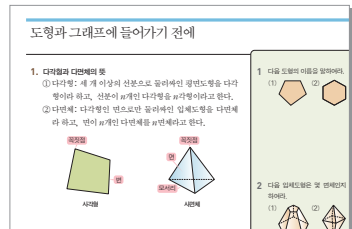
① 다각형: 세 개 이상의 선분으로 둘러싸인 평면도형을 다각형이라 하고, 선분이 n개인 다각형을 n각형이라고 한다.

② 다면체: 다각형인 면으로만 둘러싸인 입체도형을 다면체라 하고, 면이 n개인 다면체를 n면체라고 한다.

1 다음 도형의 이름을 말하여라.

(1) (2)

2 다음 입체도형은 몇 면체인지 하여라.

(1) (2)

| 교과서와 연계된 학습 |

학습 내용 정리_교과서에서 익힌 학습 내용을 정리하였으며, □ 채우기를 통하여 보다 효율적으로 습득하도록 하였다.
내용 정리가 부족한 학생은 개념을 다시 확인할 수 있도록 교과서와 연계하였다.

개념 넓히기_교과서에서 다룬 개념, 방법 등을 깊이 있게 설명하고 사고력을 넓혀 심화학습이 가능하도록 하였다.

| 자기 주도적 학습 방법 |

바탕 다지기_함께하기(예제)와 스스로 하기(유제)를 제시하여 기초적인 학습 내용을 확인하도록 하였으며 보충학습이 가능하도록 하였다.

기본 익히기_기본적인 학습 내용을 확인하는 문제를 제시하였으며 오류 유형을 소개하였다.

실력 키우기_학습 내용을 응용, 활용할 수 있는 문제를 제시하여 심화학습이 가능하도록 하였으며, 또 오류 유형을 소개하였다.

| 수학적 가치 함양 |

읽기 자료

단원과 관련된 상식을 소개하여 수학 학습의 흥미를 높일 수 있도록 하였다.

읽기 자료
로그의 역사

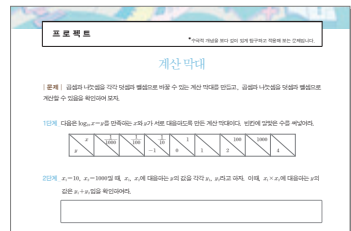
공학 도구

계산기, 컴퓨터 프로그램 및 인터넷을 활용하여 수학적 사고력 향상에 도움이 되도록 하였다.

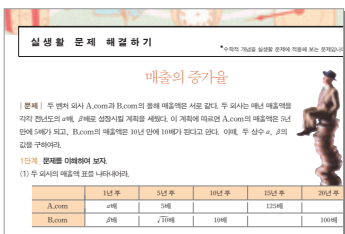
공학 도구
프로그램을 이용하여 함수의 그래프 그리기

프로젝트

수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용하는 문제로서, 다양한 방법으로 학습 내용을 활용할 수 있도록 하였다.

프로젝트
계산 막대

실생활 문제 해결하기

문제 해결 전략을 활용하여 실생활의 문제 해결력을 기르도록 하였다.

실생활 문제 해결하기
매출의 증가율

논술/수행평가 과제

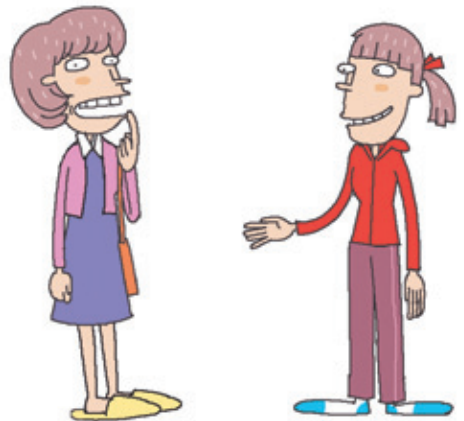
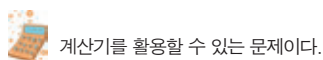
학습 내용을 바탕으로 여러 가지 문제 해결 상황을 제시하고 해결해 보도록 하였다.

논술/수행평가 과제

| 학습 평가 |

대단원 확인하기

대단원 학습의 마무리로서 문항별로 난이도와 계산, 이해, 추론 등의 수학적 능력 항목을 제시하여 학습 전략을 스스로 찾아가도록 하였다.

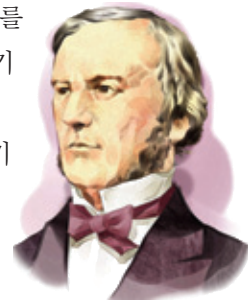
계산기를 활용할 수 있는 문제이다.

I 명제와 논리

우리 경제에서 IT 산업이 차지하는 비중이 나날이 높아 가고 있으며, IT 산업에서 가장 밑받침이 되는 반도체의 설계에는 수학의 명제와 논리가 적용된다.
현재 우리는 수학적 논리를 생각지 않고는 기술 문명의 혜택을 향유할 수 없는 시대에 살고 있다.

기호 논리학을 발전시킨 불

_Boole, G. ; 1815 ~ 1864

영국의 수학자이자 논리학자였던 불은 논리적 명제를 대수적 연산으로 처리하도록 한 불 대수를 완성하여 기호 논리학 분야에 큰 업적을 남겼다.

그는 1854년 발표한 저술 '논리와 확률의 수학적 기초를 이루는 사고의 법칙 연구' 를 통해 대수학은 수를 다루어야 한다는 통념을 깨뜨리고 대수학의 영역을 논리학까지 확장하였다.

불의 업적을 기려서 그가 연구했던 이론을 불 대수(Boolean algebra)라고 부른다. 최근에도 불 대수는 전기 스위치 회로 이론, 계산기 설계 등 많은 분야에서 활용되고 있다.

불의 또 다른 저서로는 "미분방정식에 관한 논문집", "유한차분의 미적분학에 관한 논문집" 등이 있다.

1 합성명제와 논리 회로

학습 목표

- 실생활 사례를 통해 합성명제의 참과 거짓을 판별할 수 있고, 진릿값을 진리표를 통해 구할 수 있다.
- 조건문과 쌍조건문의 참과 거짓을 판별할 수 있고, 이를 논리 연산으로 나타낼 수 있다.
- 논리 연산과 기호를 논리 회로에 활용할 수 있다.

전통적으로 대수학은 수치적 연산을 다루는 데 비해 불 대수는 참, 거짓과 같은 논리적 연산을 다룬다. 이와 같은 불 대수는 인간의 지식이나 사고 과정에서의 논리를 수학적으로 해석하기 위하여 영국의 수학자 불에 의해 제안되었다. 불 대수에서 참, 거짓은 각각 1, 0으로 표현 가능하고, 논리합이나 논리곱을 숫자로 표현하면 1+1=1인 경우를 제외하고는 수학에서 사용하는 수의 계산과 동일하다. 한편 1938년 미국의 섀넌(Shannon, C. E. ; 1916~2001)은 불 대수를 전기적 스위치 회로로 표현할 것을 제안하였다. 그 후 불 대수는 전화, 교환기 등의 통신 분야와 컴퓨터의 논리 회로에 응용되었고, 과학과 컴퓨터 기타 분야에도 널리 이용되고 있다.

합성명제와 논리 회로에 들어가기 전에

1. 명제의 뜻

참, 거짓을 분명하게 판별할 수 있는 문장이나 식을 명제라고 한다.

1 다음 중 명제인 것을 모두 찾고, 그것의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 나는 키가 크다.

(2) $2+3\neq 5$

(3) 울릉도는 섬이다.

(4) $x+3>5$

2. 명제의 부정

① 어떤 명제 p에 대하여 'p가 아니다.'를 명제 p의 부정이라 하고, 기호로 $\sim p$와 같이 나타낸다.

② 명제 p가 참이면 $\sim p$는 거짓이 되고, 명제 p가 거짓이면 $\sim p$는 참이 된다.

2 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) $3\times 2=6$

(2) 2는 3의 약수이다.

(3) 고래는 어류가 아니다.

3. 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓

① 두 조건 p, q에 대하여 명제

'p이면 q이다.'

를 기호로 $p \longrightarrow q$와 같이 나타낸다.

② 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P\subset Q$이다.
역으로, $P\subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$는 참이다.

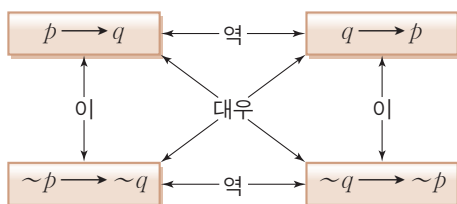
3 다음 명제의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) $x=0$이고 $y=0$이면 $x+y=0$이다.

(2) $xy=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이다.

(3) $x<1$이면 $x^2>1$이다.

(4) a와 b가 모두 홀수이면 ab는 홀수이다.

4. 명제의 역, 이, 대우

| 참고 | 어떤 명제가 참이면 그 명제의 대우도 참이고, 어떤 명제가 거짓이면 그 명제의 대우도 거짓이다.

4 명제 '$x>1$이면 $x>2$이다.'의 역, 이, 대우를 말하여라. 또 그 각각의 참, 거짓을 판별하여라.

1. 합성명제

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

진릿값과 진리표

① 명제의 참 또는 거짓을 그 명제의 진릿값이라 하고, 진릿값이 참일 때에는 기호로 T, 거짓일 때에는 기호로 F와 같이 나타낸다.

② 명제의 진릿값을 표로 나타낸 것을 진리표라고 한다.

| 보기 | 명제 '15는 소수이다.' 의 진릿값은 거짓(F)이다.

논리곱

두 개 이상의 명제를 '그리고' 로 연결한 합성명제를 그 명제들의 논리곱이라 하고, 기호로 $p \wedge q$와 같이 나타낸다.
두 명제 p와 q의 논리곱의 진리표는 오른쪽과 같다.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	(1)
F	T	F
F	F	(2)

논리합

두 개 이상의 명제를 '또는' 으로 연결한 합성명제를 그 명제들의 논리합이라 하고, 기호로 $p \vee q$와 같이 나타낸다.
두 명제 p와 q의 논리합의 진리표는 오른쪽과 같다.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	(3)
F	T	T
F	F	(4)

명제의 부정과 진릿값

명제 p의 진릿값이 참이면 이 명제를 부정한 명제의 진릿값은 (5) ☐ 이다.
그리고 명제 p의 진릿값이 거짓이면 이 명제를 부정한 명제의 진릿값은 (6) ☐ 이다.
명제 p의 부정의 진리표는 오른쪽과 같다.

p	$\sim p$
T	(7)
F	(8)

⋯▸ 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 12~19쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) F (2) F (3) T (4) F (5) 거짓 (6) 참 (7) F (8) T

바 탕 다 지 기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함 께 하 기 |

1. 두 명제

p: 멸치는 바다에 산다.
q: 문어는 강에 산다.

에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 명제 p와 q의 논리곱 $p\wedge q$와 논리합 $p\vee q$를 말하여라.

(2) 논리곱 $p\wedge q$와 논리합 $p\vee q$의 진릿값을 구하여라.

〔풀이〕

(1) $p\wedge q$: 멸치는 바다에 살고, 문어는 강에 산다.
$p\vee q$: 멸치는 바다에 살거나, 문어는 강에 산다.

(2) 명제 p의 진릿값은 참(T)이고, 명제 q의 진릿값은 거짓(F)이므로 진리표로부터
$p\wedge q$의 진릿값은 거짓(F)이고,
$p\vee q$의 진릿값은 참(T)이다.

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p\vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

| 스 스 로 하 기 |

1. 두 명제

p: 2는 홀수이다.
q: 7은 소수이다.

에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 명제 p와 q의 논리곱 $p\wedge q$와 논리합 $p\vee q$를 말하여라.

(2) 논리곱 $p\wedge q$와 논리합 $p\vee q$의 진릿값을 구하여라.

〔풀이〕

(1) $p\wedge q$: 2는 홀수☐, 7은 소수이다.
$p\vee q$: 2는 홀수☐, 7은 소수이다.

(2) 명제 p의 진릿값은 ☐이고, 명제 q의 진릿값은 ☐이므로 진리표로부터
$p\wedge q$의 진릿값은 ☐이고,
$p\vee q$의 진릿값은 ☐이다.

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p\vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

교과서 19쪽

1 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 진릿값을 구하여라.

(1) $1+1\neq 2$

(2) 모든 사람은 죽는다.

(3) 어떤 x에 대하여 $x^2-2>0$이다.

(4) 2002년 월드컵 축구 경기의 개막식은 대한민국에서 열렸다.

기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음 명제의 진릿값을 구하여라.

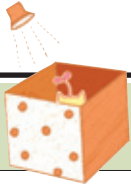
(1) 9는 소수가 아니다.

(2) 가우스는 수학자이고, 모차르트는 음악가이다.

(3) 모든 포유류는 다리가 있다.

(4) 고모는 아버지의 누이이다.

2 다음 두 명제 p와 q의 논리곱 $p \wedge q$를 말하고, 그것의 진릿값을 구하여라.

(1) p: 은행나무는 암그루와 수그루의 구별이 있다.
q: 감나무는 암그루와 수그루의 구별이 없다.

(2) p: 무화과 나무에는 꽃이 피지 않는다.
q: 무화과 나무에는 열매가 열리지 않는다.

무화과(無花果)는 꽃이 꽃받침 속에 숨어 있어 보이지 않기 때문에 붙은 이름이다.

3 다음 두 명제 p와 q에 대하여 논리합 $\sim p \vee q$를 말하고, 그것의 진릿값을 구하여라.

(1) p: 이구아나는 포유류이다.
q: 거북이는 파충류이다.

(2) p: 달은 행성이다.
q: 금성은 행성이다.

행성
중심 별의 강한 인력의 영향으로 타원 궤도를 그리며 중심 별의 주위를 도는 천체로 태양계에는 수성, 금성, 지구, 화성, 목성, 토성, 천왕성, 해왕성의 여덟 개의 행성이 있다.

4 진리표를 이용하여 합성명제 $p \wedge \sim p$의 진릿값이 항상 거짓임을 보여라.

5 명제 '태양과 가장 가까운 행성은 금성이다.'의 부정을 말하고, 그것의 진릿값을 구하여라.

실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 다음 명제 중 진릿값이 참인 것을 모두 찾아라.

(1) 허수 i는 방정식 $x^2+1=0$의 근이다.

(2) 상어는 포유류이다.

(3) 사람과 기린의 목뼈의 개수는 같다.

(4) 밀물과 썰물은 달의 영향을 받는다.

2 합성명제 $p\vee(\sim p\wedge q)$의 진리표를 만들고, 이를 이용하여 다음 두 명제 p와 q의 합성명제 $p\vee(\sim p\wedge q)$의 진릿값을 구하여라.

(1) p: 대한민국의 국화는 무궁화이다.
　　q: 중국의 국화는 벚꽃이다.

(2) p: 대한민국의 국회 의원직은 급여가 없는 명예직이다.
　　q: 대한민국의 대통령은 간접 선거로 선출한다.

한 팀당 인원이 농구는 5명, 축구는 11명, 야구는 9명이니까…….

3 합성명제 $\sim p\wedge(q\vee r)$의 진리표를 만들고, 다음 세 명제 p, q, r에 대하여 합성명제 $\sim p\wedge(q\vee r)$의 진릿값을 구하여라.

> p: 농구는 각 팀별로 6명의 선수가 경기를 한다.
> q: 축구는 각 팀별로 11명의 선수가 경기를 한다.
> r: 야구는 각 팀별로 10명의 선수가 경기를 한다.

4 진리표를 이용하여 합성명제 $p\wedge(q\vee r)$의 진릿값과 합성명제 $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$의 진릿값이 항상 같음을 보여라.

1 m=100 cm=1000 mm

5 두 명제 p와 q가 다음과 같을 때, 진리표를 이용하여 $\sim(p\vee q)$와 $\sim(p\wedge q)$의 진릿값이 같음을 보여라.

> p: 진공 속에서 빛이 1년 동안 이동한 거리를 1광년이라고 한다.
> q: 1 mm는 10^{-3} m이다.

2. 쌍조건문

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

동치명제

모든 경우에 대하여 두 명제의 진릿값이 항상 같을 때, 두 명제는 서로 (1) ☐ 명제라고 한다.

조건문과 그 진릿값

① 두 명제 p와 q가 'p이면 q이다.' 와 같이 연결된 합성명제를 (2) ☐ 이라 하고, 기호로 $p \longrightarrow q$와 같이 나타낸다.

② 조건문 $p \longrightarrow q$의 진릿값은 명제 p의 진릿값이 (3) ☐ 이고 명제 q의 진릿값이 (4) ☐ 일 때에만 거짓이고, 그 밖의 경우는 모두 참으로 정한다.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

쌍조건문과 그 진릿값

① 두 명제 p와 q가 'p이면 q이고, q이면 p이다.' 와 같이 연결된 합성명제를 (5) ☐ 이라 하고, 기호로 $p \longleftrightarrow q$와 같이 나타낸다.

② 쌍조건문의 정의에 의하여 $p \longleftrightarrow q$는 $(p \longrightarrow q)$ (6) ☐ $(q \longrightarrow p)$와 서로 동치명제이다.

③ 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값은 두 명제 p와 q가 모두 참이거나 모두 거짓일 때에만 (7) ☐ 이고, 그 밖의 경우는 (8) ☐ 으로 정한다.

p	q	$p \longleftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

합성명제와 동치명제

다음은 서로 동치명제이다.

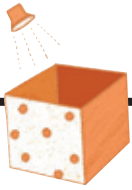
① 합성명제 $\sim(p \vee q)$와 $\sim p \wedge \sim q$

② 합성명제 $\sim(p \wedge q)$와 $\sim p \vee \sim q$

③ 조건문 $p \longrightarrow q$와 합성명제 $\sim p \vee q$

④ 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$와 합성명제 $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

⋯ 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 20~23쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 동치 (2) 조건문 (3) 참 (4) 거짓 (5) 쌍조건문 (6) ∧ (7) 참 (8) 거짓

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께하기 |

1. 다음 두 합성명제의 진릿값을 각각 구하고, 서로 동치명제임을 보여라.

$$p \longrightarrow \sim q, \ \sim p \vee \sim q$$

〔풀이〕

조건문 $p \longrightarrow \sim q$의 진리표는 다음과 같다.

p	q	$\sim q$	$p \longrightarrow \sim q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T

한편 합성명제 $\sim p \vee \sim q$의 진리표는 다음과 같다.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

위의 두 진리표에서 모든 경우에 대하여 진릿값이 같으므로 $p \longrightarrow \sim q$와 $\sim p \vee \sim q$는 서로 동치명제이다.

| 스스로 하기 |

1. 다음 두 합성명제의 진릿값을 각각 구하고, 서로 동치명제임을 보여라.

$$\sim(p \wedge \sim q), \ \sim p \vee q$$

〔풀이〕

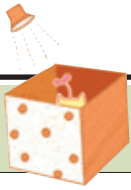
합성명제 $\sim(p \wedge \sim q)$의 진리표는 다음과 같다.

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	☐
F	T	F	F	T
F	F	T	F	☐

한편 합성명제 $\sim p \vee q$의 진리표는 다음과 같다.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	☐
F	T	T	T
F	F	T	☐

위의 두 진리표에서 모든 경우에 대하여 진릿값이 같으므로 $\sim(p \wedge \sim q)$와 $\sim p \vee q$는 서로 동치명제이다.

교과서 22, 23쪽

1 다음 두 명제 p와 q에 대하여 조건문 $p \longrightarrow q$와 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값을 구하여라.

(1) p: 추석에 보이는 달은 보름달이다.
    q: 설날에 보이는 달은 반달이다.

(2) p: 설악산은 강원도에 있다.
    q: 한라산은 제주특별자치도에 있다.

기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

음…….
우선 주어진 합성명제의 진리표를 각각 만들어 보면…….

1 다음 합성명제 중 동치명제인 것끼리 짝지어라.

(1) $p \wedge \sim q$

(2) $p \vee \sim q$

(3) $\sim(p \longrightarrow q)$

(4) $\sim p \longrightarrow \sim q$

조건문 $p \longrightarrow q$는 p가 참, q가 거짓일 때에만 거짓이다.

2 다음 두 명제 p와 q에 대하여 조건문 $p \longrightarrow q$의 진릿값을 구하여라.

(1) p: 메뚜기는 곤충이다.
  q: 매미는 곤충이다.

(2) p: 염소의 다리는 네 개이다.
  q: 캥거루의 다리는 두 개이다.

3 다음 두 명제 p와 q에 대하여 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값을 구하여라.

(1) p: 낙타 등의 혹은 한 개이다.
  q: 도마뱀은 다리가 없다.

(2) p: 물은 수소와 산소로 이루어져 있다.
  q: 다이아몬드는 규소로 이루어져 있다.

4 두 명제 p와 q에 대하여 진리표를 이용하여 두 조건문 $p \longrightarrow q$와 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 서로 동치명제임을 보여라.

5 두 명제 p와 q에 대하여 두 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$와 $\sim p \longleftrightarrow \sim q$는 서로 동치명제임을 보여라.

여러 가지 합성명제의 동치명제

세 명제 p, q, r에 대하여 다음 두 합성명제는 서로 동치명제이다.

① $p \vee q$, $q \vee p$

② $p \wedge q$, $q \wedge p$

③ $(p \vee q) \vee r$, $p \vee (q \vee r)$

④ $(p \wedge q) \wedge r$, $p \wedge (q \wedge r)$

⑤ $p \vee (q \wedge r)$, $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

⑥ $p \wedge (q \vee r)$, $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

⑦ $\sim(p \vee q)$, $\sim p \wedge \sim q$

⑧ $\sim(p \wedge q)$, $\sim p \vee \sim q$

①~⑧에서 각각의 두 명제가 서로 동치명제인 것은 진리표를 이용하면 알 수 있다.

이를테면 위의 ⑥에서 두 합성명제의 진리표는 다음과 같으므로 $p \wedge (q \vee r)$와 $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$는 서로 동치명제이다.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	T	F	T	F
F	F	T	T	F
F	F	F	F	F

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	F	F

이와 같은 동치 관계를 이용하면 복잡한 합성명제를 간단하게 바꿔서 진릿값을 구할 수 있다.

예를 들어 $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$는 $p \wedge (q \vee \sim q)$와 동치명제이고, 명제 $q \vee \sim q$의 진릿값은 항상 참이므로 $p \wedge (q \vee \sim q)$와 p는 동치명제이다. 따라서 두 명제 $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$와 p는 동치명제이다.

실 력 키 우 기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

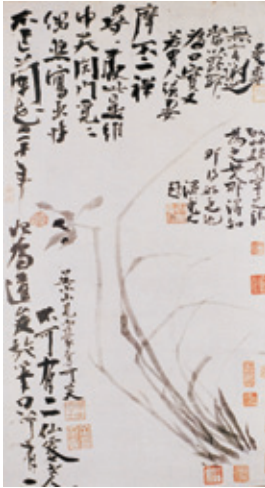
1 다음 합성명제 중 서로 동치명제인 것을 모두 찾아라.

(1) $p \longleftrightarrow \sim q$ (2) $q \longleftrightarrow \sim p$

(3) $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$ (4) $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

김정희의 부작란도

2 다음 두 명제 p와 q에 대하여 합성명제 $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$의 진릿값을 구하여라.

(1) p: 추사 김정희는 과학자이다.
q: 세종대왕은 조선 시대의 왕이다.

(2) p: 한 평면 위에 있는 두 직선이 만나지 않으면 두 직선은 서로 평행하다.
q: 서로 다른 두 점이 주어지면 직선이 하나로 결정된다.

진리표를 만들어 $q \longleftrightarrow r$의 진릿값을 먼저 구한 다음 $p \longrightarrow (q \longleftrightarrow r)$의 진릿값을 구한다.

3 세 명제 p, q, r가 다음과 같을 때, 합성명제 $p \longrightarrow (q \longleftrightarrow r)$의 진릿값을 구하여라.

> p: 한 시간은 60분이다.
> q: 하루는 24시간이다.
> r: 일주일은 6일이다.

4 두 명제 p와 q에 대하여 두 합성명제 $p \longrightarrow q$와 $\sim p \vee q$가 서로 동치명제임을 이용하여 두 조건문 $p \longrightarrow \sim q$와 $q \longrightarrow \sim p$가 서로 동치명제임을 보여라.

두 합성명제의 진리표를 각각 만들어 본다.

5 세 명제 p, q, r에 대하여 두 합성명제 $(p \longrightarrow q) \longrightarrow r$와 $p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$는 서로 동치명제가 아님을 보여라.

조건문 $p \longrightarrow q$의 부정

두 명제 p, q에 대하여 조건문 $p \longrightarrow q$의 부정은 $\sim(p \longrightarrow q)$이다.
다음 중 $\sim(p \longrightarrow q)$와 동치명제가 있는지 알아보자.
① p이면 q가 아니다. 즉, $p \longrightarrow \sim q$
② p가 아니면 q이다. 즉, $\sim p \longrightarrow q$
③ p가 아니면 q가 아니다. 즉, $\sim p \longrightarrow \sim q$

어떤 명제를 부정하면 그 진릿값은 참, 거짓이 서로 바뀌게 된다. 따라서 합성명제 $p \longrightarrow q$의 부정, 즉 $\sim(p \longrightarrow q)$의 진릿값은 오른쪽 진리표와 같다.

p	q	$p \to q$	$\sim(p \to q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	F

그러나 조건문 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim p \longrightarrow q$, $\sim p \longrightarrow \sim q$의 진리표는 다음과 같으므로 합성명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim p \longrightarrow q$, $\sim p \longrightarrow \sim q$ 모두 $\sim(p \longrightarrow q)$와 동치명제가 아님을 알 수 있다.

p	q	$\sim q$	$p \to \sim q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T

p	q	$\sim p$	$\sim p \to q$
T	T	F	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	F

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \to \sim q$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

한편 두 합성명제 $p \longrightarrow q$와 $\sim p \vee q$는 동치명제이므로 합성명제 $p \longrightarrow q$의 부정, 즉 $\sim(p \longrightarrow q)$는 $\sim(\sim p \vee q)$, $p \wedge \sim q$와 동치명제이다.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee q$	$\sim(\sim p \vee q)$	$p \wedge \sim q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	F	F

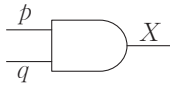
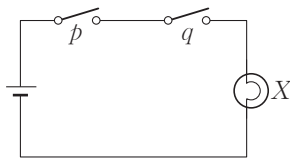
따라서 조건문 $p \longrightarrow q$의 부정은 'p이고, q가 아니다.' 라고 할 수 있다.
예를 들어 조건문 '상어가 어류이면 물개는 어류이다.' 의 부정은 '상어는 어류이고, 물개는 어류가 아니다.' 라고 할 수 있다.

3. 논리 회로

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

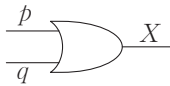
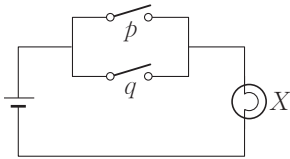
논리 회로

스위치가 있는 회로의 켜짐과 꺼짐으로 명제의 논리곱, 논리합, 부정을 표현한 회로를 논리 회로라고 한다.

논리곱 회로 (AND 회로)

기호 회로도

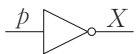
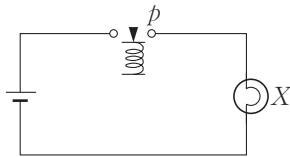
p	q	$X=p\wedge q$
1	1	1
1	0	(1)
0	1	(2)
0	0	0

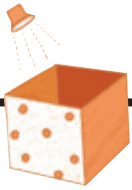
진리표

논리합 회로 (OR 회로)

기호 회로도

p	q	$X=p\vee q$
1	1	(3)
1	0	1
0	1	(4)
0	0	0

진리표

논리 부정 회로 (NOT 회로)

기호 회로도

p	$X=\sim p$
1	(5)
0	(6)

진리표

| 참고 | ─○▼○─ 와 같이 논리 부정 회로에 특정한 명제가 없으면 그 앞에 있는 논리 전체를 부정하는 것이다.

···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 24~27쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 0 (2) 0 (3) 1 (4) 1 (5) 0 (6) 1

바탕 다지기

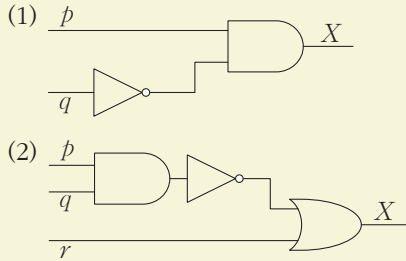
*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 다음 논리 회로의 기호가 나타내는 합성명제를 말하여라.

(1)

(2)

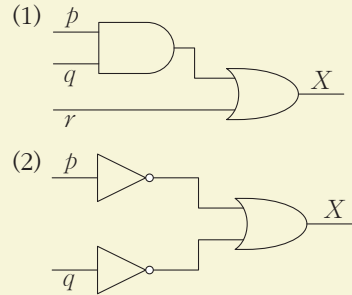
〔풀이〕

(1) q ─▷○─ X 는 명제 $\sim q$를 나타내고

p, q ─AND─ X 는 합성명제 $p\wedge q$를 나타내므로 주어진 기호는 합성명제 $p\wedge\sim q$를 나타낸다.

(2) p, q ─AND─ X 는 합성명제 $p\wedge q$를 나타내고 p ─▷○─ X 는 명제 $\sim p$를 나타내므로 p, q ─AND─▷○─ X 는 합성명제 $\sim(p\wedge q)$를 나타낸다.

한편 p, q ─OR─ X 는 합성명제 $p\vee q$를 나타내므로 주어진 기호는 합성명제 $\sim(p\wedge q)\vee r$를 나타낸다.

| 스스로 하기 |

1. 다음 논리 회로의 기호가 나타내는 합성명제를 말하여라.

(1)

(2)

〔풀이〕

(1) p, q ─AND─ X 는 합성명제 [　　　]를 나타내고 p, q ─OR─ X 는 합성명제 [　　　]를 나타내므로 주어진 기호는 합성명제 [　　　　　]를 나타낸다.

(2) p ─▷○─ X 는 명제 [　　]를 나타내고 p, q ─OR─ X 는 합성명제 [　　　]를 나타내므로 주어진 기호는 합성명제 [　　　　　]를 나타낸다.

교과서 27쪽

1 두 명제 p와 q에 대하여 다음 합성명제의 논리 회로를 기호로 나타내어라.

(1) $\sim p\vee q$　　　　(2) $\sim(p\vee q)$

기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

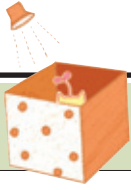
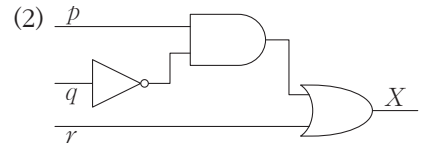
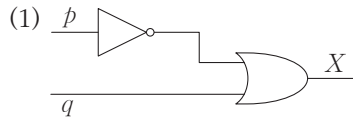
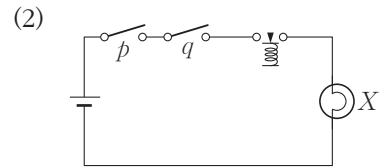
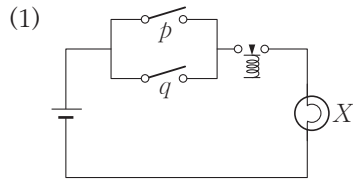
1 다음 중 논리 회로에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 찾아라.

(1) 논리곱 회로는 입력 조건이 모두 참(1)일 때만 그 결과가 참(1)이다.

(2) 논리합 회로는 입력 조건 중 어느 하나만 참(1)이면 그 결과는 거짓(0)이다.

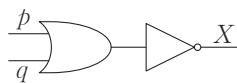
(3) 논리 부정 회로는 입력이 거짓(0)이면 그 결과가 참(1)이다.

(4) 논리 부정 회로는 입력이 참(1)이면 그 결과가 거짓(0)이다.

2 세 명제 p, q, r에 대하여 다음 논리 회로의 기호가 나타내는 합성명제를 말하여라.

(1)
(2)
주어진 논리 회로의 회로도를 기호로 바꾸어 생각한다.

3 두 명제 p와 q에 대하여 다음 그림의 논리 회로가 나타내는 합성명제를 말하여라.

(1)
(2)
4 세 명제 p, q, r에 대하여 다음 합성명제를 나타내는 논리 회로를 기호로 나타내어라.

(1) $\sim(p \wedge q) \vee q$　　　　(2) $p \vee (\sim q \vee r)$

논리 회로의 기호가 나타내는 합성명제를 구하여 진리표의 X 대신에 대입한다.

5 다음 논리 회로의 진리표를 완성하여라.

p	q	X
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

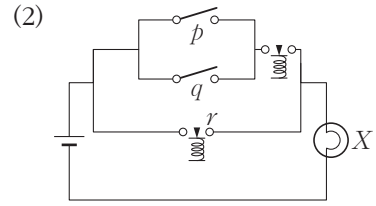
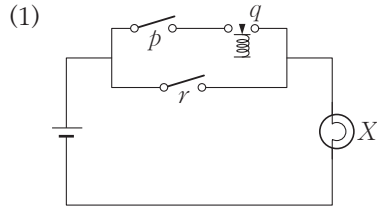
실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 세 명제 p, q, r에 대하여 다음 논리 회로가 나타내는 합성명제의 진리표를 만들어라.

(1)

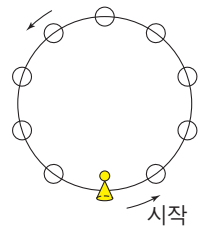
(2)

$p \longrightarrow q$는 $\sim p \vee q$와 서로 동치명제임을 이용한다.

2 두 명제 p와 q에 대하여 합성명제 $\sim(p \longrightarrow q)$를 동치인 명제를 이용하여 논리 회로의 기호로 나타내어라.

3 다음 중 오른쪽의 진리표가 나타내는 논리 회로를 기호로 나타내어라.

p	q	X
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

4 다음 중 아래의 주사위 놀이를 나타내는 합성명제를 찾아라.

두 개의 주사위 P, Q를 동시에 던져 P 주사위의 눈의 수가 홀수이면 $p=1$, 짝수이면 $p=0$이라고 하자. 마찬가지로 Q 주사위의 눈의 수가 홀수이면 $q=1$, 짝수이면 $q=0$이라고 하자. 두 주사위의 눈의 수가 모두 홀수이면 말을 앞으로 한 칸 이동($X=1$)하고, 그렇지 않으면 이동하지 않는다($X=0$).

(1) $p \vee q$　　(2) $p \wedge q$

(3) $\sim p \vee q$　　(4) $\sim(p \vee q)$

실생활 문제 해결하기

*수학적 개념을 실생활 문제에 적용해 보는 문제입니다.

논리적 추론

| 문제 | 우리가 말 또는 글로 어떤 사실을 주장할 때, 상대방을 잘 설득하기 위해서는 그 주장이 논리적이어야 한다. 진리표를 이용하여 다음에 주어진 두 유형의 논리적 추론이 옳음을 보여라.

추론 ① $p \longrightarrow q$가 참이고 p가 참이면 q도 참이다.
추론 ② $p \longrightarrow q$가 참이고 $q \longrightarrow r$가 참이면 $p \longrightarrow r$도 참이다.

1단계_ 문제를 이해하여 보자.

구체적인 예를 통하여 문제를 이해하여 보자. 빈칸에 알맞은 것을 써넣어라.

(1) $p \longrightarrow q$	봄이 오면 제비가 날아온다.
p	봄이 왔다.
$\therefore q$	그러므로 ______

(2) $p \longrightarrow q$	아리스토텔레스는 사람이다.
$q \longrightarrow r$	모든 사람은 죽는다.
$\therefore p \longrightarrow r$	그러므로 ______

2단계_ 계획을 세워 보자.

(1) 두 명제 p, q에 대하여 조건문 $p \longrightarrow q$의 진리표를 만들고, 조건문 $p \longrightarrow q$의 진릿값이 참인 경우를 모두 찾아라.

(2) 세 명제 p, q, r에 대하여 조건문 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$, $p \longrightarrow r$의 진리표를 만들고, 조건문 $p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow r$의 진릿값이 각각 참인 경우를 모두 찾아라.

3단계_ 문제를 풀어 보자.

(1) 2단계 (1)에서 만든 진리표에서 조건문 $p \longrightarrow q$와 명제 p의 진릿값이 각각 참일 때, 명제 q의 진릿값을 조사하여 추론 ①이 옳음을 밝혀라.

(2) 2단계 (2)에서 만든 진리표에서 조건문 $p \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow r$의 진릿값이 각각 참일 때, 조건문 $p \longrightarrow r$의 진릿값을 조사하여 추론 ②가 옳음을 밝혀라.

4단계_ 검토하여 보자.

3단계와 1단계의 결론을 비교하여 보고, 잘못된 것이 있으면 고쳐 보아라.

역설과 수학의 발전

세상에 감기가 존재하지 않는다면 사람들은 보다 건강하게 오래 살 수 있을까? 이와 관련하여 의외의 의견이 있다. 감기 바이러스가 인체를 공격하면 균에 대한 저항력이 길러져서 보다 큰 질병을 이겨낼 수 있게 된다는 것이다. 학문도 이와 같은 공격과 방어를 통하여 더욱 튼튼한 체계를 갖추게 된다.

기원전 6세기경에 크레타 섬 출신의 에피메니데스는 "모든 크레타 인들은 거짓말쟁이이다." 라는 유명한 말을 남겼다. 이 말은 참이라 해도 모순이 되고, 거짓이라 해도 모순이 된다. 이러한 것을 패러독스라고 한다. 에피메니데스가 고안한 이 역설은 약 2500년이 지난 뒤 괴델(Gödel, K. ; 1906~1978)의 불완전성 정리로 해소되었다.

이와 같이 수학의 역사에서도 역설이 존재하고, 이것을 해결하기 위해 끊임없이 노력하는 과정을 통하여 수학이 발전해 왔음을 발견할 수 있다.

논술/수행평가 과제

다음 만화를 보고, 다리를 무사히 통과한 사람이 한 말을 추측하여 보자.

I 대단원 확인하기

이해

1 ★

다음 명제의 진릿값을 구하여라.

(1) 추석은 양력으로 8월 15일이다.

(2) 두 점 (x_1, y_1)과 (x_2, y_2) 사이의 거리는 $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$이다.

이해

2 ★

다음 합성명제에서 두 명제 p와 q를 찾고, 각각의 진릿값을 구하여라. 또 처음에 주어진 합성명제의 진릿값을 구하여라.

(1) 태풍은 바다 또는 육지에서 생겨난다.

(2) 파스칼은 덧셈과 뺄셈이 가능한 계산기를 만들었고, 라이프니츠는 사칙계산이 가능한 계산기를 만들었다.

이해

3 ★

두 명제 p와 q에 대하여 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값을 구하여라.

(1) p: 해는 동쪽에서 뜬다. q: 달은 서쪽에서 뜬다.

(2) p: 10월 1일은 광복절이다. q: 4월 5일은 어린이날이다.

이해

4 ★★

두 명제 p와 q에 대하여 다음 중 항상 참인 명제를 찾아라.

(1) $p\wedge(p \longrightarrow q)$ (2) $(p \longrightarrow q)\wedge q$

(3) $(p \longrightarrow q)\vee q$ (4) $p\vee(p \longrightarrow q)$

추론

5 ★★

다음 합성명제 중 서로 동치명제인 것을 모두 찾아라.

(1) $(p \longrightarrow q)\wedge(\sim p \longrightarrow \sim q)$ (2) $p \longleftrightarrow q$

(3) $\sim(p\vee q)\vee(p\wedge q)$ (4) $(\sim p\wedge q)\vee(p\wedge \sim q)$

이해

6 ★★

세 명제 p, q, r에 대하여 합성명제 $(p\vee q)\wedge r$의 진리표를 만들어라.

추론

7 ★★★

세 명제 p, q, r에 대하여 두 합성명제 $(p \vee q) \longrightarrow r$와 $(p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r)$의 진리표를 각각 만들고, 두 합성명제가 서로 동치명제임을 보여라.

이해

8 ★★

세 명제 p, q, r에 대하여 다음 두 합성명제는 서로 동치명제임을 보여라.

(1) $p \vee q$, $q \vee p$

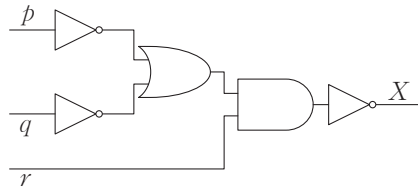
(2) $p \wedge q$, $q \wedge p$

(3) $(p \wedge q) \wedge r$, $p \wedge (q \wedge r)$

(4) $p \vee (q \wedge r)$, $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

의사소통

9 ★★

세 명제 p, q, r에 대하여 어떤 논리 회로의 기호가 다음과 같을 때, 진리표를 완성하여라.

p	q	r	X
1	1	1	
1	1	0	
1	0	1	
1	0	0	
0	1	1	
0	1	0	
0	0	1	
0	0	0	

문제 해결

10 ★★★

어떤 사람이 다음과 같이 동전을 던져서 놀이 공원에 갈 것인지, 수영장에 갈 것인지를 결정한다고 할 때, 이것을 논리 회로의 기호로 나타내어라.

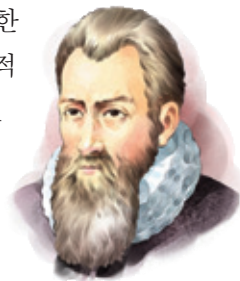
> 두 개의 동전 P, Q를 동시에 던져 P 동전이 앞면이 나오는 경우를 $p=1$, 뒷면이 나오는 경우를 $p=0$이라고 하자. 마찬가지로 Q 동전이 앞면이 나오는 경우를 $q=1$, 뒷면이 나오는 경우를 $q=0$이라고 하자. 두 동전이 서로 같은 면이 나오면 놀이 공원에 가고($X=1$), 그렇지 않으면 수영장에 간다($X=0$).

Ⅱ 지수와 로그

살아 있는 화석이라고 불리는 앵무조개는 중생대부터 살아온 지구 역사의 산 증거이다. 중생대는 지금부터 6500만 년 전부터 2억 2500만 년 전까지를 말한다. 이와 같이 큰 수 또는 매우 작은 수의 표현이나 계산에 지수와 로그가 유용하게 사용된다.

로그를 발명한 네이피어

_Napier, J. ; 1550 ~ 1617

네이피어의 가장 큰 업적은 로그의 발명이다. 편리한 계산법을 고안하는 데에 몰두했던 그는 1614년 '경이적인 로그법칙의 기술(Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio)'이라는 논문을 통해 로그의 성질과 용도를 발표하였다. 로그는 천문학에서 사용되는 매우 큰 수의 계산, 특히 곱셈과 같은 계산을 간편하게 한다.

또 계산기의 일종인 네이피어의 막대(Napier's bones)를 고안하였고, 그 계산법을 "막대 계산술 (Rabdologiae)"에 실었다.

네이피어는 수학 외에 발명에도 관심이 많아 잠수함, 기관총, 탱크 등을 구상하기도 하였다.

1 지수와 로그

학습 목표

- 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
- 지수가 유리수, 실수까지 확장됨을 이해한다.
- 로그의 뜻과 성질을 이해한다.

1. 지수　　2. 로그

나노(nano)는 10^{-9}을 나타내는 용어로 난쟁이를 뜻하는 고대 그리스어 '나노스(nanos)'에서 유래하였다. 1나노미터(nm)는 수소 원자 10개를 나란히 늘어놓은 것과 같은 길이이다.

이와 같이 매우 작은 값이나 메가(10^6) 또는 기가(10^9)와 같이 아주 큰 값을 나타낼 때에 지수를 사용하면 편리하다.

지수와 로그에 들어가기 전에

1. a^n(a는 실수, n은 자연수)의 정의

a^n은 실수 a를 n번 곱한 것이다. 즉

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{개}}$$

2. 지수법칙

a, b가 실수이고, m, n이 자연수일 때

① $a^m a^n = a^{m+n}$ ② $(a^m)^n = a^{mn}$

③ $(ab)^m = a^m b^m$ ④ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ (단, $b \neq 0$)

⑤ $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$ (단, $a \neq 0$)

3. 인수분해

① 인수분해 공식

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

② 치환을 이용한 인수분해

복잡한 식을 인수분해할 때에는 몇개의 항을 묶어서 치환하여 인수분해하면 편리하다.

| **보기** | x^4+2x^2+1은 $x^2=X$로 치환하면
$X^2+2X+1=(X+1)^2=(x^2+1)^2$

4. 10의 거듭제곱을 이용한 수의 표현

임의의 양수 x는 $x=a\times 10^n$ ($1 \le a < 10$, n은 정수)과 같이 1 이상 10 미만의 양수와 지수가 정수인 10의 거듭제곱 꼴로 나타낼 수 있다.

| **보기** | $12345 = 1.2345 \times 10^4$

1 다음을 a^n의 꼴로 나타내어라.

(1) $2\times2\times2\times2\times2$

(2) $(-3)\times(-3)\times(-3)$

(3) $a\times a\times a\times a$

2 □ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

(1) $2^5\times2^7\div2^2=2^{\square}$

(2) $(3^5)^2\times3^3=3^{\square}$

(3) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^3\times5^5=3^{\square}\times5^{\square}$

(4) $1.5^4\div1.5^2=1.5^{\square}$

(5) $5^3\div5^7=\dfrac{1}{5^{\square}}$

3 다음 다항식을 인수분해하여라.

(1) x^3-27

(2) $7x^4-2x^2-5$

4 다음 수를 $a\times10^n$의 꼴로 나타내어라. (단, $1\le a<10$, n은 정수)

(1) 314

(2) 20110913

(3) 0.00271

1. 지수

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

거듭제곱

어떤 실수 a를 n번 거듭하여 곱한 a^n을 a의 n제곱이라고 한다.
이때, a, a^2, a^3, $\cdots$, a^n, $\cdots$ 을 통틀어 a의 거듭제곱이라고 한다.

a^n ← (1) / ← 밑

거듭제곱근

① 실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 방정식 $x^n=a$를 만족하는 x를 a의 n제곱근이라고 한다. 이때, a의 제곱근, a의 세제곱근, a의 네제곱근, $\cdots$ 을 통틀어 a의 거듭제곱근이라고 한다.

② a의 실수인 n제곱근

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	(2)
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	(3)	없다

거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=$ (4)

② $\dfrac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=$ (5)

지수의 정의

① $a^0=$ (6) $(a\neq0)$

② $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ ($a\neq0$, n은 자연수)

③ $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ ($a>0$, m, n은 정수, $n\geq2$)

지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

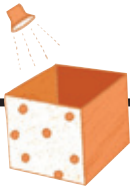
① $a^xa^y=$ (7)

② $(a^x)^y=a^{xy}$

③ $(ab)^x=a^xb^x$

④ $a^x\div a^y=$ (8)

···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 34~41쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 지수 (2) $\sqrt[n]{a}$ (3) 0 (4) $\sqrt[n]{ab}$ (5) $\sqrt[mn]{a}$ (6) 1 (7) a^{x+y} (8) a^{x-y}

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 다음을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt{125}$

(2) $(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)$

〔풀이〕

(1) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt{125}=5^{\frac{1}{3}}\times5^{\frac{3}{2}}$

$=5^{\frac{1}{3}+\frac{3}{2}}=5^{\frac{11}{6}}$

(2) $(\sqrt[3]{3}-1)(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)$

$=(3^{\frac{1}{3}}-1)(3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}+1)$

$=(3^{\frac{1}{3}})^3-1$

$=2$

2. 다음을 간단히 하여라.

(1) $3^{-2}\times3^3$

(2) $(7^{\frac{3}{2}})^2\div\sqrt{7}$

〔풀이〕

(1) $3^{-2}\times3^3=3^{-2+3}=3$

(2) $(7^{\frac{3}{2}})^2\div\sqrt{7}=7^{\frac{3}{2}\times2}\div7^{\frac{1}{2}}$

$=7^{3-\frac{1}{2}}$

$=7^{\frac{5}{2}}$

| 스스로 하기 |

1. 다음을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{3}\div\sqrt[3]{3}$

(2) $(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$

〔풀이〕

(1) $\sqrt{3}\div\sqrt[3]{3}=3^{\square}\div3^{\square}$

$=3^{\square}$

(2) $(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$

$=(2^{\square}+1)(2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}+1)$

$=(2^{\square})^3+1$

$=\square$

2. 다음을 간단히 하여라.

(1) $2^5\times2^{-3}$

(2) $(5^{\frac{1}{3}})^6\div\sqrt[3]{5}$

〔풀이〕

(1) $2^5\times2^{-3}=2^{\square}$

(2) $(5^{\frac{1}{3}})^6\div\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}\times\square}\div5^{\square}$

$=5^{\square}\div5^{\square}$

$=5^{\square}$

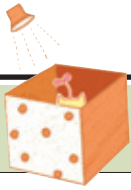
교과서 39, 40쪽

1 다음을 a^n의 꼴로 나타내어라. (단, a는 자연수, n은 유리수)

(1) $\frac{1}{5^3}$ (2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ (3) $\sqrt[3]{2^2}$

교과서 39, 40쪽

2 다음 값을 구하여라.

(1) $(-3)^0$ (2) 2^{-2} (3) $\left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}$

기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) $\sqrt[3]{16}=2^{\square}$　　　　(2) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{2}}=2^{\square}$

2 부피가 a인 정육면체의 한 모서리의 길이를 구하여라.

1시간=60분
=3600초

3 빛의 속력이 3×10^{8} m/s일 때, 빛이 한 시간 동안 이동한 거리를 $a\times10^{n}$ (m)의 꼴로 나타내어라. (단, $1\le a<10$, n은 자연수)

먼저 주어진 식의 분모와 분자에 a^{x}을 곱해 보자.

4 양수 a에 대하여 $a^{2x}=5$일 때, $\dfrac{a^{x}+a^{-x}}{a^{x}-a^{-x}}$의 값을 구하여라.

5 x, y가 양수일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x+y)$

(2) $(x+y)\div(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})$

(3) $\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

(4) $(x^{\sqrt{3}}\times y)^{\sqrt{3}}\div(\sqrt[3]{x}\times y^{-\sqrt{3}})$

실 력 키 우 기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 $10^x=\frac{8}{5}$, $10^y=\frac{125}{2}$일 때, $x+y$의 값을 구하여라.

2 탄소 12(^{12}C)의 원자 6×10^{23}개의 질량이 12 g일 때, 20 g에 포함된 탄소 12의 원자의 개수를 구하여라.

3 $a>0$이고 m, n이 자연수일 때, 다음 거듭제곱근의 성질을 증명하여라.

(1) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ (2) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

$(a+a^{-1})^2=a^2+a^{-2}+2$
를 이용한다.

4 자연수 m에 대하여 $9^m+9^{-m}=6$일 때, 3^m+3^{-m}의 값을 구하여라.

5 용액 1 L 속에 들어 있는 수소 이온(H^+)의 몰 수가 10^{-m}몰(M)일 때, 이 용액의 수소 이온 농도 지수를 pH$=m$으로 정의한다. pH$=3.2$인 용액 1 L 속에 들어 있는 수소 이온의 몰 수는 pH$=7.2$인 용액 1 L 속에 들어 있는 수소 이온의 몰 수의 몇 배인지 구하여라.

소문의 확산 속도

현대 사회는 정보 통신 기술의 발전으로 전 세계에서 일어나고 있는 일들을 실시간으로 지구상 어느 곳으로나 전달할 수 있게 되었다. 이 사실은 '발 없는 말이 천 리 간다.'는 우리나라의 속담을 다시 한 번 생각하게 한다. 변함없는 사실은 소문이 천 리, 만 리 퍼져 나간다는 것이고, 차이점은 소문이 퍼져 나가는 속도가 옛날과는 비교할 수 없을 정도로 빨라졌다는 것이다.

어떤 정보를 얻은 사람이 1시간에 아직 정보를 알지 못하는 3명에게 그 정보를 전달한다면 12시간이 지난 후에는 몇 사람이 그 정보를 알게 될지 계산하여 보자.

한 시간 후에는 3명에게 정보가 전달되므로, 정보를 알게 되는 사람의 수는

$$1+3=4\text{(명)}$$

다시 한 시간이 흐르면 4명이 각각 3명에게 정보를 전달하므로 정보를 알게 되는 사람이 중복되지 않을 때 정보를 알게 되는 사람의 수는

$$4+3\times4=4^2\text{(명)}$$

3시간이 지났을 때에도 같은 방법으로 계산하면 정보를 알게 되는 사람의 수는

$$4^2+3\times4^2=4^3\text{(명)}$$

이때, 12시간 후 정보를 알게 되는 사람의 수는

$$4^{12}=16777216\text{(명)}$$

이므로 16777216명이 정보를 알게 된다. 여기서 다시 한 시간이 흐르면

$$4^{13}=67108864\text{(명)}$$

즉, 우리나라 인구수보다 훨씬 많은 사람들이 정보를 알게 된다.

그리고 17시간 후에는

$$4^{17}=17179869184\text{(명)}$$

즉, 전 세계 인구인 약 67억을 훨씬 초과하는 사람들이 이 정보를 알게 된다.

이와 같이 순식간에 많은 사람들이 정보를 알게 되므로 허위 정보가 입히는 피해 또한 극심하다. 따라서 인터넷을 사용할 때에는 허위 사실을 유포하거나 남을 비방하는 등 타인에게 피해를 주는 행동을 삼가고 예절을 잘 지켜야 한다.

논술/수행평가 과제

어떤 컴퓨터에 있는 파일 하나가 컴퓨터 바이러스에 감염되었다. 이 바이러스는 매일 감염되지 않은 10개의 파일을 감염시킨다. 컴퓨터 안에는 충분히 많은 파일이 존재한다고 가정하면 감염된 파일의 바이러스도 같은 방법으로 바이러스를 감염시킬 때, 4일 후 이 컴퓨터에는 몇 개의 감염된 파일이 존재하게 되는가?

2. 로그

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

로그의 정의

$a>0$, $a\neq1$이고 $N>0$일 때

$$a^x=N \iff x=\log_a N$$

이때, x를 a를 (1) ☐ 으로 하는 N의 로그라고 한다. 또 N을 $\log_a N$의 (2) ☐ 라고 한다.

로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$, $x>0$, $y>0$이고 k가 임의의 실수일 때

① $\log_a 1=0$, $\log_a a=$ (3) ☐

② $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

③ $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

④ $\log_a x^k=k\log_a x$

로그의 여러 가지 공식

a, b, c는 양수이고, $a\neq1$, $c\neq1$일 때

① $\log_a b=\frac{\text{(4) ☐}}{\log_c a}$

② $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$

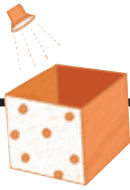
③ $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$

상용로그와 상용로그의 지표와 가수

① 양수 N에 대하여 10을 밑으로 하는 로그 $\log_{10} N$을 상용로그라 하고, 기호로 $\log N$과 같이 나타낸다.

② 임의의 양수 M에 대하여 $\log M=n+\alpha$ (n은 정수, $0\leq\alpha<1$)일 때, 정수 n을 $\log M$의 지표, α를 $\log M$의 (5) ☐ 라고 한다.

지표와 가수의 성질

① 정수 부분이 n자리인 수의 상용로그의 지표는 (6) ☐ 이다.

② 소수 n째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는 1보다 작은 양수의 상용로그의 지표는 (7) ☐ 이다.

③ 숫자의 배열이 같고, 소수점의 위치만 다른 수들의 상용로그의 가수는 모두 같다.

⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 42~53쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 밑 (2) 진수 (3) 1 (4) $\log_c b$ (5) 가수 (6) $n-1$ (7) $-n$

바 탕 다 지 기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함 께 하 기 |

1. $\log_{10}2=a$, $\log_{10}3=b$라고 할 때, $\log_{10}72$를 a와 b로 나타내어라.

〔풀이〕

$\log_{10}72=\log_{10}(2^3\times3^2)$
$=\log_{10}2^3+\log_{10}3^2$
$=3\log_{10}2+2\log_{10}3$
$=3a+2b$

2. $\log 2.38=0.3766$임을 이용하여 $\log 2380$의 값을 구하여라.

〔풀이〕

$2380=2.38\times10^3$이므로
$\log 2380=\log(2.38\times10^3)$
$=\log 2.38+\log 10^3$
$=\log 2.38+3\log 10$
$=0.3766+3$
$=3.3766$

| 스 스 로 하 기 |

1. $\log_5 2=a$, $\log_5 3=b$라고 할 때, $\log_5 12$를 a와 b로 나타내어라.

〔풀이〕

$\log_5 12=\log_5(2^2\times\square)$
$=\log_5 2^{\square}+\log_5 3$
$=\square\log_5 2+\log_5 3$
$=\square$

2. $\log 2.06=0.3139$임을 이용하여 $\log 206$의 값을 구하여라.

〔풀이〕

$206=2.06\times10^{\square}$이므로
$\log 206=\log(2.06\times10^{\square})$
$=\log 2.06+\square$
$=\log 2.06+\square\log 10$
$=0.3139+\square$
$=\square$

교과서 44쪽

1 다음 등식을 $a^x=b$의 꼴은 $x=\log_a b$의 꼴로, $\log_a b=x$의 꼴은 $a^x=b$의 꼴로 나타내어라.

(1) $3^4=81$　　(2) $10^0=1$

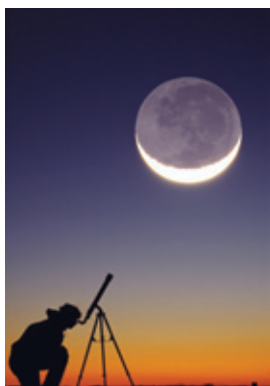
(3) $\log_2 8=3$　　(4) $\log_{10}\frac{1}{100}=-2$

교과서 48, 49쪽

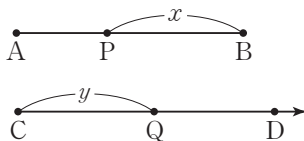
2 다음을 밑의 변환 공식을 이용하여 상용로그로 바꾸어라.

(1) $\log_3 2$　　(2) $\log_5\frac{1}{7}$

(3) $\log_{\frac{1}{2}}5$　　(4) $\log_{\frac{1}{2}}10$

로그의 역사

17세기 초 망원경의 발명으로 천문학, 항해술, 삼각법이 급속히 발달하였고, 이에 따라 방대하고도 복잡한 천문학상의 계산을 하기 위해 새로운 계산 기술이 절실히 요구되었다. 이러한 시대적인 요구에 따라 네이피어(Napier, J. ; 1550~1617)는 새로운 계산 방법인 로그를 발명하였다. 로그의 개념을 쓰면 크고 복잡한 곱셈 문제를 간단한 덧셈 문제로 바꿀 수 있기 때문에 라플라스(Laplace, P. S. ; 1749~1827)가 "천문학자의 수고를 덜어줌으로써 그들의 수명을 두 배로 늘렸다."라고 말했을 정도로, 로그의 발명은 수학사에 길이 남는 매우 획기적인 것이었다.

네이피어가 정의한 로그의 개념은 다음과 같다.

오른쪽 그림과 같이 선분 AB와 반직선 CD에서 점 P와 점 Q가 동시에 점 A와 점 C를 각각 출발하여 움직일 때, 점 P가 남은 거리 $\overline{PB}$에 비례한 속도로 움직이고, 점 Q는 일정한 속도로 움직인다고 가정하여, $\overline{CQ}$를 $\overline{PB}$의 로그라고 정의하였다. 즉, 위의 그림에서 $y=\text{Naplog}\,x$이다. 이때, Naplog는 네이피어 로그의 기호이다.

네이피어는 그의 저서 "놀라운 로그법칙의 기술"에서 처음으로 이 계산법에 대하여 설명하였으며, 그가 죽은 지 2년 후에 나온 "놀라운 로그법칙의 집대성"에는 로그표의 계산법이 실려 있다.

'비의 수'라는 뜻의 로그(logarithm)와 진수(numerus)라는 낱말도 네이피어가 만들어 낸 용어이다. 그러나 실제로 계산에 이용할 수 있는 상용로그표는 브리그스(Briggs, H. ; 1561~1630)에 의해서 만들어진 것이다.

브리그스는 상용로그로 불리는 밑이 10인 로그를 탄생시켰고, 그 기본 성질을 밝혔다. 그는 1617년 '1부터 1000까지의 수의 로그'에서 14자리까지 계산한 로그표를 만들었고, 1624년에는 1부터 20000까지와 90000에서 100000까지 수의 14자리까지 나타낸 상용로그표를 포함하는 "로그 산술"이라는 책을 출간하였다. 현재 사용하는 '지표'와 '가수'라는 말도 브리그스가 처음으로 사용하였다.

그 후 블라크(Vlacq, A. ; 1600~1666)는 브리그스가 작성한 로그표의 공백을 채운, 보다 상세한 로그표를 만들었다.

기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음을 간단히 하여라.

(1) $\frac{3}{2}\log_2 8+\log_2\sqrt{2}$ (2) $\log_{10}75+\log_{10}4-\log_{100}9$

2 $\log 3=a$, $\log 5=b$라고 할 때, $\log 36$을 a, b로 나타내어라.

이차방정식
$ax^2+bx+c=0$
의 두 근을 α, β라고 하면
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

3 이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근을 각각 $\log_5 a$, $\log_5 b$라고 할 때, $\log_5 ab$의 값을 구하여라.

4 $1<x<10$인 x에 대하여 $\log x$의 가수와 $\log\frac{1}{x}$의 가수가 같을 때, 실수 x의 값을 구하여라.

5 빛이 어떤 유리 한 장을 통과할 때마다 그 밝기가 1 %씩 감소한다고 한다. 처음 밝기가 100럭스(lux)인 빛이 이와 같은 유리 다섯 장을 통과하였을 때의 밝기를 구하여라.

(단, $\log 9.90=0.9956$, $\log 9.506=0.9780$)

실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 1보다 큰 세 실수 a, b, c에 대하여

$$\log_a c : \log_b c = 2 : 1$$

일 때, $\log_a b + \log_b a$의 값을 구하여라.

조건을 이용하여 주어진 식을 한 문자에 대하여 고친다.

2 $a^3b^5=1$일 때, $\log_{ab} a^5b$의 값을 구하여라.

(단, $ab\neq1$, $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$)

$\log n = f(n)+g(n)$임을 이용한다.

3 자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표와 가수를 각각 $f(n)$, $g(n)$이라고 할 때

$$f(100n)g\left(\frac{n}{10}\right)=f(n)g(n)+2g(n)$$

임을 보여라.

4 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$일 때, 3^{45}은 몇 자리 수인지 구하고, 최고 자리의 숫자를 말하여라.

5 포그슨의 공식(Pogson's formula)에 의하면 별의 등급 m과 별의 밝기 I 사이에는

$$m=-\frac{5}{2}\log I + C \quad (C\text{는 상수})$$

의 관계식이 성립한다. 이때, 2등성인 별의 밝기는 4등성인 별의 밝기의 몇 배인지 구하여라.

실생활 문제 해결하기

*수학적 개념을 실생활 문제에 적용해 보는 문제입니다.

매출의 증가율

| 문제 | 두 벤처 회사 A.com과 B.com의 올해 매출액은 서로 같다. 두 회사는 매년 매출액을 각각 전년도의 α배, β배로 성장시킬 계획을 세웠다. 이 계획에 따르면 A.com의 매출액은 5년 만에 5배가 되고, B.com의 매출액은 10년 만에 10배가 된다고 한다. 이때, 두 상수 α, β의 값을 구하여라.

1단계_ 문제를 이해하여 보자.

(1) 두 회사의 매출액 표를 나타내어라.

	1년 후	5년 후	10년 후	15년 후	20년 후
A.com	α배	5배		125배	
B.com	β배	$\sqrt{10}$배	10배		100배

(2) 구하는 것이 무엇인지 말하여라.

2단계_ 계획을 세워 보자.

두 회사의 5년 후 매출액을 각각 α, β를 이용하여 나타내어라.

3단계_ 문제를 풀어 보자.

(1) 2단계의 식의 양변에 상용로그를 취하고, 계산기를 이용하여 $\log\alpha$, $\log\beta$의 값을 구하여라.

(2) 계산기를 이용하거나 $\log 2=0.3010$, $\log 1.38=0.1398$, $\log 1.26=0.1$임을 이용하여 두 상수 α, β의 값을 구하여라.

4단계_ 검토하여 보자.

해답이 옳은지 확인하여라.

2 지수함수와 로그함수

학습 목표

• 지수함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해한다.
• 로그함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해한다.

1. 지수함수와 그 그래프 2. 로그함수와 그 그래프

지진의 피해 정도는 그 세기에 따라 결정되고, 지진의 세기는 지진파의 최대 진폭에 따라 결정된다.

리히터(Richter. C. F. ; 1900∼1986)는 1935년 지진의 세기를 나타내는 단위로 '규모(Magnitude)'를 로그를 이용하여 정의하였다.

우리가 주로 사용하는 지진의 규모는 지진이 일어난 곳으로부터 100 km 떨어진 지점에서 측정한 지진의 최대 진폭이 10 μm일 때의 규모를 1.0, 최대 진폭이 100 μm일 때의 규모를 2.0, 최대 진폭이 1000 μm일 때의 규모를 3.0, …과 같이 정의한다. 즉, 지진의 최대 진폭이 10배씩 커질 때마다 규모는 1씩 증가한다.

지수함수와 로그함수에 들어가기 전에

1. 함수의 뜻

변하는 두 양 x, y에 대하여 x의 값이 변함에 따라 y의 값이 하나씩 정해질 때, y를 x의 함수라 하고, 이것을 기호로

$$y=f(x)$$

와 같이 나타낸다.

1 다음의 함수 $f(x)$의 정의역과 치역을 각각 말하여라.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

(2) $f(x)=\sqrt{x+2}$

2. 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^x a^y=a^{x+y}$ ② $(a^x)^y=a^{xy}$

③ $(ab)^x=a^x b^x$ ④ $a^x \div a^y=a^{x-y}$

2 다음을 간단히 하여라.

(1) $5^{-3}\times(5^3)^2$

(2) $7^{2\sqrt{3}}\div 7^{\sqrt{3}}$

(3) $21^5\div 3^5$

3. 로그의 정의

$a>0$, $a\neq 1$이고 $N>0$일 때

$$a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_a N$$

3 다음 등식을 로그를 사용하여 나타내어라.

(1) $20^0=1$ (2) $3^2=9$

(3) $0.1^2=0.01$ (4) $2^{-3}=\dfrac{1}{8}$

4. 로그의 성질

$a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, $y>0$이고 k가 임의의 실수일 때

① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

② $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

③ $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

④ $\log_a x^k=k\log_a x$

4 다음을 간단히 하여라.

(1) $\log 3+\log 5$

(2) $3\log 2-\log 8$

1. 지수함수와 그 그래프

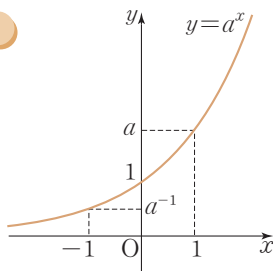
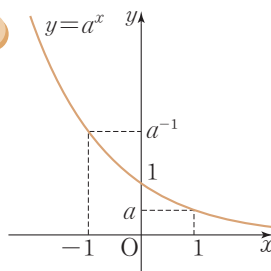
* □ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

지수함수의 뜻

실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

$$y=a^x \ (a>0,\ a\neq1)$$

을 a를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.

지수함수의 그래프

0<a<1

지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$의 성질

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

② $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 (1) 한다.

$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 (2) 한다.

③ 그래프는 점 $(0,$ (3) $)$과 점 $(1,\ a)$를 지난다.

④ 그래프의 점근선은 (4) 축이다.

두 수의 대소 관계

두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1<x_2$이면

(i) $a>1$일 때, a^{x_1} (5) a^{x_2}

(ii) $0<a<1$일 때, a^{x_1} (6) a^{x_2}

⋯ 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 56~59쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 증가 (2) 감소 (3) 1 (4) x (5) < (6) >

바탕 다지기

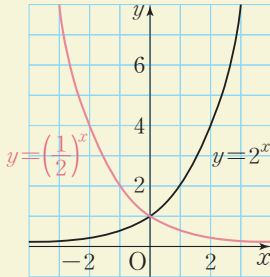
*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 이용하여 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 그려라.

〔풀이〕

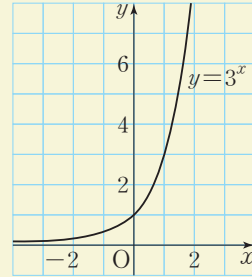
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$이므로 함수 $y=2^x$의 그래프와 함수 $y=2^{-x}$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 다음과 같다.

| 스스로 하기 |

1. 지수함수 $y=3^x$의 그래프를 이용하여 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 그려라.

〔풀이〕

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^{\square}$이고 함수 $y=3^x$의 그래프와 함수 $y=3^{-x}$의 그래프는 $\square$축에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프는 다음과 같다.

교과서 58쪽

1 다음은 지수함수 $y=5^x$ $(a>0,\ a\neq1)$에 대한 설명이다. $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

(1) x의 값이 증가하면 y의 값은 $\square$한다.

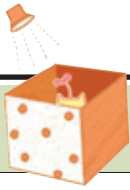
(2) 이 그래프는 점 $(0,\ \square)$과 점 $(1,\ \square)$를 지난다.

(3) 이 그래프의 점근선은 $\square$축이다.

교과서 59쪽

2 다음 수의 대소를 비교하여라.

(1) $2^{\frac{1}{3}},\ 2^{\frac{1}{4}}$

(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^2,\ \left(\frac{1}{4}\right)^3$

기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음 함수의 그래프를 그리고, 치역을 말하여라.

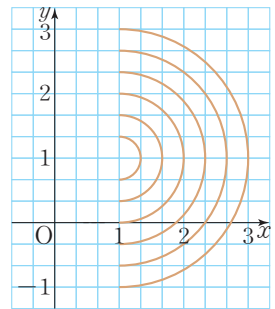
(1) $y=2^{x+1}$ (2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

(3) $y=3^{-x+1}$ (4) $y=2^{x-2}-1$

밑을 같게 하여 지수의 크기를 비교한다.

2 다음 세 수의 대소를 비교하여라.

(1) $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{27}$, $\sqrt{3}$ (2) $\sqrt[3]{0.1}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sqrt[5]{\frac{1}{100}}$

3 오른쪽 그림은 중심이 $(1,\ 1)$이고, 반지름의 길이가 각각 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, 2인 6개의 반원을 그린 것이다. 함수 $y=3^{-x}$의 그래프와 반원의 교점의 개수를 구하여라.

4 우리나라에서는 환경을 보호하고 자원을 재활용하기 위하여 1985년부터 빈 용기 보조금 제도를 시행하고 있다. 빈 용기 회수율이 90 %인 어떤 회사에서 어느 해에 10^8개의 병을 사용하였을 때, 이 중 t년 후에 재활용되고 있는 병의 개수를 $N(t)$라고 하면

$$N(t)=10^8\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^t$$

의 관계식이 성립한다. 이때, 1년, 2년, 3년 후에 재활용되는 병의 개수를 각각 구하여라.

실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 다음 수를 큰 수부터 차례로 나열하여라.

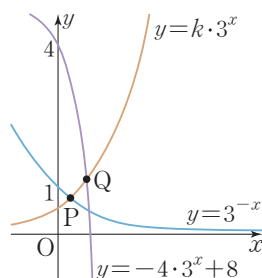
$$\sqrt[3]{4},\ \sqrt[4]{8},\ \sqrt{3},\ \sqrt[4]{25}$$

치환하여 문제를 풀 때에는 주어진 구간의 변화에 유의하여야 한다.

2 다음 지수함수의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

(1) $y=2^{x-1}-1\ (-1\le x\le 2)$

(2) $y=9^{-x}-12\cdot 3^{-x-1}-1\ (-2\le x\le 0)$

3 함수 $y=k\cdot 3^x\ (0<k<1)$의 그래프가 두 함수 $y=3^{-x}$, $y=-4\cdot 3^x+8$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라고 하자. 점 P와 점 Q의 x좌표의 비가 $1:2$일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

4 함수 $f(x)=a^x\ (a>0,\ a\ne 1)$에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 골라라. (단, x, y는 실수)

ㄱ. $f(x)-f(y)=f(x-y)$	ㄴ. $f(x)f(y)=f(x+y)$
ㄷ. $\{f(x)\}^y=f(xy)$	ㄹ. $f(x)\div f(y)=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ (단, $y\ne 0$)

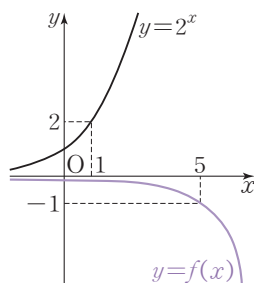
좌표평면에서 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(x-a,\ y)=0$

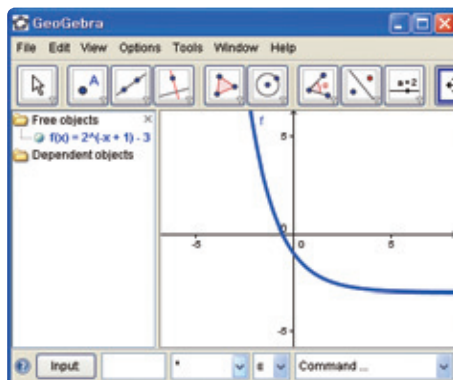
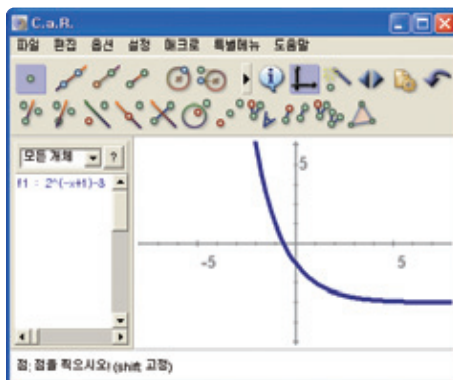
이다.

5 오른쪽 그림에서 함수 $f(x)=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{ax+b}$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 c만큼 평행이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이다. a, b, c의 값을 구하여라.

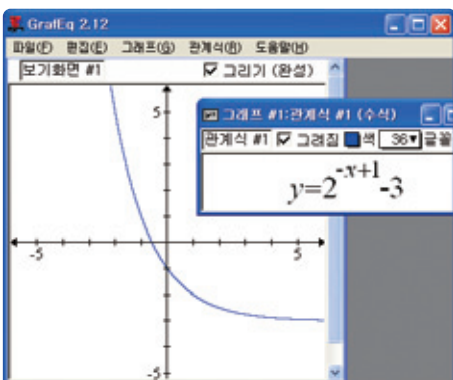
공학 도구

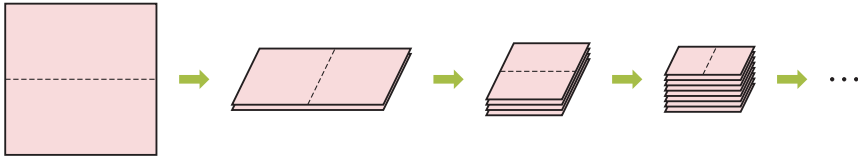
* 수학적 개념을 공학 도구를 이용하여 이해하고 탐구해 보세요.

프로그램을 이용하여 함수의 그래프 그리기

GeoGebra, C.a.R., GrafEq 등과 같은 소프트웨어를 이용하면 함수의 그래프를 쉽게 그릴 수 있다.

1. GeoGebra에서 지수함수 $y=2^{-x+1}-3$의 그래프를 그리는 방법은 다음과 같다.
   ❶ GeoGebra 홈페이지 (http://www.geogebra.org/cms)에서 GeoGebra를 내려받아 설치한다.
   ❷ 프로그램을 실행한 후 화면 하단의 input에
   $$y=2\hat{}(-x+1)-3$$
   을 입력하고, Enter 키를 누른다.

2. C.a.R.에서 지수함수 $y=2^{-x+1}-3$의 그래프를 그리는 방법은 다음과 같다.
   ❶ C.a.R. 홈페이지 (http://zirkel.sourceforge.net)에서 C.a.R.를 내려받아 설치한다.
   ❷ 프로그램을 실행한 후 함수 아이콘(f(x))을 클릭한 후 열린 대화 상자에서 y좌표를 나타내는 식에
   $$2\hat{}(-x+1)-3$$
   을 입력하고, 확인을 클릭한다.

3. GrafEq에서 지수함수 $y=2^{-x+1}-3$의 그래프를 그리는 방법은 다음과 같다.
   ❶ Pedagoguery Software Inc. 사의 홈페이지 (http://www.peda.com) 또는 전국수학교사 모임 홈페이지(http://www.tmath.or.kr)에서 GrafEq를 내려받아 설치한다.
   ❷ 프로그램을 실행한 후 열린 대화 상자에
   $$y=2\hat{}(-x+1)-3$$
   을 입력하고, Enter 키를 누른다.
   ❸ 열린 창에서 만들기를 클릭한다.

실생활 문제 해결하기

*수학적 개념을 실생활 문제에 적용해 보는 문제입니다.

종이 쌓기

| **문제** | 두께가 0.1 mm인 종이 한 장을 절반으로 잘라서 겹치는 과정을 반복할 때, 겹쳐 놓은 종이의 두께가 지구와 달 사이의 거리인 380000 km보다 두꺼워지려면 이 과정을 최소한 몇 번 반복해야 하는지 구하여라.

1단계_ 문제를 이해하여 보자.

(1) 구해야 할 것이 무엇인지 말하여라.

(2) 주어진 조건을 찾아보아라.

2단계_ 계획을 세우고, 문제를 풀어 보자.

(1) 한 장의 종이를 절반으로 잘라서 겹치는 과정을 n번 반복할 때, 겹쳐 놓은 종이의 두께를 d mm라고 하자. 이때, d를 n에 대한 식으로 나타내어라.

(2) 위의 과정을 무한히 반복할 수 있다고 할 때, 몇 번 반복하면 처음으로 종이의 두께가 380000 km보다 두꺼워지는지 조사하여라. (단, $2^{40}=1.1\times10^{12}$으로 계산한다.)

3단계_ 검토하여 보자.

해답이 옳은지 확인하고, 잘못된 점이 있다면 이를 고쳐 보아라.

2. 로그함수와 그 그래프

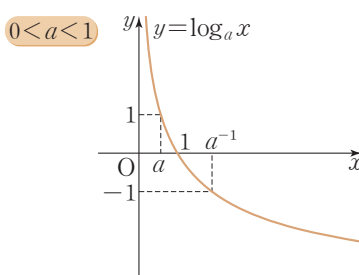
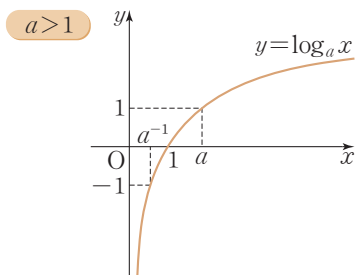
* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

로그함수의 뜻

지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$의 역함수

$$y=\log_a x$$

를 (1) ☐ 를 밑으로 하는 로그함수라고 한다.

로그함수의 그래프

| 참고 | 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프는 지수함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$의 성질

① 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 (2) ☐ 의 집합이다.

② $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 (3) ☐ 한다.

$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 (4) ☐ 한다.

즉, 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1<x_2$이면

• $a>1$ 일 때, $\log_a x_1<\log_a x_2$

• $0<a<1$일 때, $\log_a x_1>\log_a x_2$

③ 그래프는 점 $(1,\ 0)$과 점 $(a,\ 1)$을 지난다.

④ 그래프의 점근선은 (5) ☐ 축이다.

⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 60~63쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) a (2) 실수 전체 (3) 증가 (4) 감소 (5) y

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

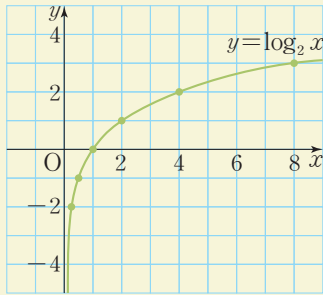
| 함께 하기 |

1. 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 그려라.

〔풀이〕

x가 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8일 때, x의 값에 대응하는 y의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
y		…	-2	-1	0	1	2	3	…

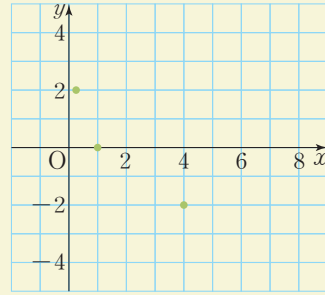
위의 표에서 서로 대응하는 x, y값의 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표평면 위에 나타내고, 매끄러운 곡선으로 연결하면 $y=\log_2 x$의 그래프는 다음과 같다.

| 스스로 하기 |

1. 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프를 그려라.

〔풀이〕

x가 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8일 때, x의 값에 대응하는 y의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
y		…	2	□	0	□	-2	□	…

위의 표에서 서로 대응하는 x, y값의 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표평면 위에 나타내고, 매끄러운 곡선으로 연결하면 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프는 다음과 같다.

교과서 62쪽

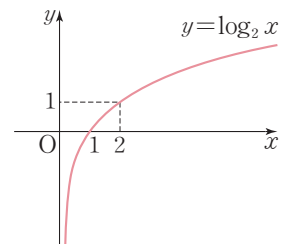
1 다음 함수의 역함수를 구하고, 그 그래프를 그려라.

(1) $f(x)=3^x$ (2) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

교과서 63쪽

2 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 수의 대소를 비교하여라.

(1) $\log_2 7$, $\log_2 9$

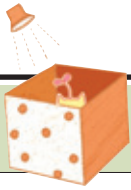
(2) $\log_2 \frac{1}{3}$, $\log_2 \frac{1}{5}$

*수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용해 보는 문제입니다.

계산 막대

| **문제** | 곱셈과 나눗셈을 각각 덧셈과 뺄셈으로 바꿀 수 있는 계산 막대를 만들고, 곱셈과 나눗셈을 덧셈과 뺄셈으로 계산할 수 있음을 확인하여 보자.

1단계_ 다음은 $\log_{10}x=y$를 만족하는 x와 y가 서로 대응하도록 만든 계산 막대이다. 빈칸에 알맞은 수를 써넣어라.

x	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1		100	1000	
y			-1	0	1	2		4

2단계_ $x_1=10$, $x_2=1000$일 때, x_1, x_2에 대응하는 y의 값을 각각 y_1, y_2라고 하자. 이때, $x_1\times x_2$에 대응하는 y의 값은 y_1+y_2임을 확인하여라.

3단계_ $x_1=10$, $x_3=10000$일 때, x_1, x_3에 대응하는 y의 값을 각각 y_1, y_3이라고 하자. 이때, $x_1\div x_3$에 대응하는 y의 값은 y_1-y_3임을 확인하여라.

4단계_ **2단계**와 **3단계**의 역으로 y_1+y_2, y_1-y_3에 대응하는 x의 값은 각각 $x_1\times x_2$, $x_1\div x_3$임을 확인하여라.

논술/수행평가 과제

위와 같은 방법으로 $\log_2 x=y$를 만족하는 x와 y가 서로 대응하도록 계산 막대를 만들어 보자.

x	$\frac{1}{8}$								
y	-3								

기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음 중 로그함수 $y=\log_5 x$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 골라라.

ㄱ. 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
ㄴ. 점근선은 x축이다.
ㄷ. 함수 $y=\log_{\frac{1}{5}} x$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.
ㄹ. 함수 $y=-\log_5 x$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.

$a>1$일 때, $x_1<x_2$이면
$\log_a x_1<\log_a x_2$
이다.

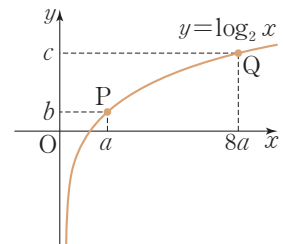
2 다음 수의 대소를 비교하여라.

(1) $\log_2 3,\ \log_4 6$ (2) $\frac{\log 3}{3},\ \frac{\log 4}{4}$

오류 피하기
$x<0$일 때, $\log x^2 \neq 2\log x$
이다.

3 다음 로그함수 중 그 그래프가 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 일치하는 것을 모두 골라라.

ㄱ. $y=\log_4 x^2$ ㄴ. $y=\log_2 \frac{1}{x}$
ㄷ. $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ ㄹ. $y=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}$

4 오른쪽 그림은 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프이다. 곡선 위의 두 점 P, Q의 좌표가 각각 P$(a,\ b)$, Q$(8a,\ c)$일 때, $c-b$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 양수)

실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

밑을 같게 할 수 있는 것 먼저 비교해 봐야겠어.

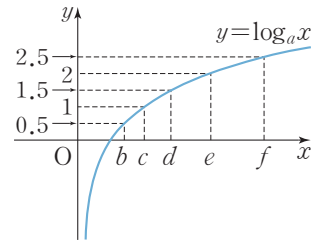
1 다음 수를 큰 것부터 차례로 나열하여라.

$$\frac{3}{2},\quad \log_2 0.6,\quad \log_4 5,\quad \log_5 4$$

2 오른쪽 그림은 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프이다. 다음 중 bf의 값과 같은 것을 찾아라. (단, $a>0$, $a\neq1$)

(1) cd　　(2) ce

(3) cf　　(4) de

로그함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

3 로그함수 $y=\log_a x+m$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점에서 만난다. 두 교점의 x좌표가 각각 1, 3일 때, $a+m$의 값을 구하여라.

(단, $a>0$, $a\neq1$)

4 용액의 산성도를 알려주는 pH는 용액 1 L 중에 있는 수소 이온(H^+) 농도 mol/L의 역수에 대한 상용로그의 값으로 계산한다. 즉, 수소 이온 농도가 x mol/L일 때, 산성도(pH)가 y라고 하면

$$y=\log\frac{1}{x}$$

의 관계식이 성립한다. 산성도가 5.5인 빗물 1 L의 수소 이온 농도는 산성도가 7인 빗물 1 L의 수소 이온 농도의 몇 배인지 구하여라.

대단원 확인하기

계산

1 ★

다음을 간단히 하여라.

(1) $\dfrac{(a^{-3})^2\times(a^{-2})^{-4}}{a^{-6}\times a^4}$ (단, $a\neq0$)　　(2) $\sqrt{a^3}\div\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt[4]{a}$ (단, $a>0$)

이해

2 ★★

$\log_2 5=a$일 때, $\log_5\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{10}}}$을 a로 나타내어라.

계산

3 ★

다음을 간단히 하여라.

(1) $3\log_{\frac{1}{3}}5+2\log_{\frac{1}{3}}4-3\log_{\frac{1}{3}}2$　　(2) $\left(\log_3 5-\log_9\dfrac{1}{5}\right)\left(\log_5\dfrac{3}{2}+\log_5 2\right)$

의사소통

4 ★★

$a=10^x$, $b=10^y$일 때, $\log_{\sqrt{a}}b^2$을 x, y로 나타내어라.

이해

5 ★

$5.16^x=10$, $0.00516^y=10$일 때, $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$의 값을 구하여라.

의사소통

6 ★★

다음 상용로그의 값을 구하고, 지표와 가수를 말하여라. (단, $\log 5.16=0.7126$)

(1) $\log 5160^3$　　(2) $\log\sqrt{0.00516}$

이해

7
★★★

다음 지수함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=2^{x+1}-3$　　(2) $y=2^{-|x|}$

이해

8
★★

다음 로그함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=\log_3(-x)+1$　　(2) $y=-\log_3 x$

문제 해결

9
★★★

상용로그의 지표가 m인 자연수 전체의 개수를 x, 역수의 상용로그의 지표가 $-n$인 자연수 전체의 개수를 y라고 할 때, $\log x-\log y$를 m, n으로 나타내어라.

문제 해결

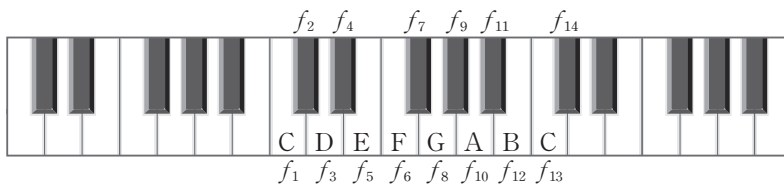
10
★★

다음 그림과 같이 피아노 건반의 '가운데 도(C)'의 진동수를 f_1, 각 음의 진동수를 f_n이라고 할 때,

$$f_n=f_1\cdot r^{n-1},\ r=\sqrt[12]{2}$$

의 관계식이 성립한다. 물음에 답하여라.

(1) F의 진동수 f_6은 f_1의 몇 배인가?

(2) '가운데 도(C)'보다 한 옥타브 높은 음의 진동수인 f_{13}은 f_1의 몇 배인가?

III 수열

달력의 숫자, 육상 트랙, 뜀틀과 사다리 등에서는 일정한 양만큼씩 증가하거나 감소하는 규칙을 찾을 수 있다. 또 사진이나 인쇄물의 확대나 축소 등에서 일정한 비율로 증가하거나 감소하는 규칙을 찾을 수 있다.

수열의 발전에 공헌한 피보나치

_Fibonacci ; 1170~1250

피보나치는 1202년에 "Algebra et Almuchabala"라는 책을 발간하였고, 이 내용을 개정하여 1228년에 "산반서(Liber Abaci)"를 출간하였다. 이 책은 인도와 아라비아의 수 체계에 바탕을 두고 있으며, 피보나치수열(Fibonacci sequence) 문제를 포함하여 400개 이상의 문제와 풀이를 싣고 있다.

'갓 태어난 한 쌍의 토끼가 있다. 이 토끼 한 쌍은 두 달 후부터 매달 암수 한 쌍의 토끼를 낳는다. 새로 태어난 토끼들도 두 달 후부터 매달 암수 한 쌍의 토끼를 낳는다고 할 때, 토끼는 1년 후 모두 몇 쌍이 되겠는가?'

이 문제에서 토끼 쌍의 수가 다음과 같은 흥미 있는 수열이 된다는 것을 알 수 있다.

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ x,\ y,\ x+y,\ \cdots$$

이와 같이 인접한 두 항의 합이 다음 항과 같은 수열을 '피보나치수열'이라고 한다. 이 수열은 벌의 번식, 식물의 잎, 해바라기씨, 앵무조개의 나선 모양 등 예상하지 못한 곳에서 놀랄 만큼 자주 나타난다.

1 등차수열과 등비수열

학습 목표

- 수열의 뜻을 안다.
- 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
- 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

1. 등차수열

2. 등비수열

천재 수학자로 알려진 가우스는 어릴 적에 1부터 100까지의 자연수의 합을 짧은 시간에 구한 것으로 유명하다. 대부분의 학생이 1에 2를 더하고 그 값에 3을 더하는 식으로 계산했지만, 가우스는 자신이 생각해 낸 방법으로 단 몇분 만에 답을 구했다. 이러한 방법을 '가우스의 덧셈' 이라고도 한다.

가우스의 덧셈에 대한 아이디어는 환율이나 주가의 급격한 변동에 따른 위험을 줄이는 데에도 응용된다. 그 밖의 다양한 영역에서도 '가우스의 덧셈' 에서의 발상이 활용되고 있다.

가우스 (Gauss, K. F. ; 1777~1855)

등차수열과 등비수열에 들어가기 전에

1. 약수와 배수

세 자연수 A, B, C 또는 세 다항식 A, B, C에 대하여 A가 B와 C의 곱으로 나타날 때, 즉 $A=BC$일 때, B를 A의 약수, A를 B의 배수라고 한다.

1 50 이하의 자연수 중 다음의 개수를 구하여라.

(1) 3의 배수

(2) 5의 배수

(3) 3과 5의 공배수

2. 인수분해

① $ma+mb=m(a+b)$

② $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

③ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

④ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

⑤ $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

⑥ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

⑦ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

⑧ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

⑨ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

2 다음을 인수분해하여라.

(1) $x(x+1)+2x$

(2) $x(x+1)(2x+1)-x(x+1)$

(3) $(x+1)^3-(x^3+1)$

3. 항등식의 성질

① 등식 $ax+b=0$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow$ $a=b=0$

② 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식 $\Longleftrightarrow$ $a=b=c=0$

3 등식 $(a+b)x+a-2b+3=0$이 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b의 값을 정하여라.

4. 일차방정식

(x에 대한 일차식)$=0$의 꼴로 된 방정식을 x에 대한 일차방정식이라고 한다.

4 다음 일차방정식을 풀어라.

(1) $3x-5=x-7$

(2) $2(x-1)-8=0$

5. 연립방정식의 풀이

가감법이나 대입법을 이용하여 미지수의 개수를 줄이고, 미지수가 1개인 일차방정식으로 고쳐서 해를 구한다.

5 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=5 \\ x+7y=-5 \end{cases}$ 를 풀어라.

1. 등차수열

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

수열의 뜻

① 어떤 규칙에 따라 차례로 나열된 수의 열을 수열이라 하고, 나열된 각 수를 그 수열의 항이라고 한다. 이때, 유한개의 항으로 이루어진 수열을 유한수열이라 하고, 항의 개수가 무한히 많은 수열을 무한수열이라고 한다.

② 수열을 나타낼 때에는 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ 또는 $\{a_n\}$과 같이 나타낼 수 있으며, 이때 a_n을 수열의 일반항이라고 한다.

등차수열의 뜻과 일반항

① 첫째항부터 차례로 일정한 수를 더하여 만들어지는 수열을 등차수열이라 하고, 그 일정한 수를 공차라고 한다.

② 첫째항이 a이고, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n = \boxed{(1)\qquad}$$

등차중항

① 세 수 $a,\ b,\ c$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라고 한다.

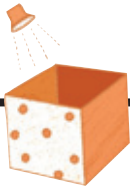
② 세 수 $a,\ b,\ c$가 이 순서대로 등차수열을 이루기 위한 필요충분조건은 $2b = \boxed{(2)\qquad}$이다.

등차수열의 합

첫째항이 a, 공차가 d, 제n항이 l인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\frac{n(\boxed{(3)\qquad}+l)}{2} = \frac{n\{\boxed{(4)\qquad}+(n-1)d\}}{2}$$

···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 70~77쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) $a+(n-1)d$ (2) $a+c$ (3) a (4) $2a$

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 다음 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

(1) $-15,\ -10,\ -5,\ 0,\ 5,\ 10,\ \cdots$

(2) 첫째항이 3이고, 제10항이 66인 등차수열

〔풀이〕

(1) 첫째항이 -15

공차가 $-10-(-15)=5$

이므로

$a_n=-15+(n-1)\cdot 5=5n-20$

(2) 주어진 등차수열의 공차를 d라고 하면

$a_{10}=3+(10-1)d=66$에서

$9d=63 \quad \therefore d=7$

$\therefore a_n=3+(n-1)\cdot 7=7n-4$

| 스스로 하기 |

1. 다음 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

(1) $17,\ 11,\ 5,\ -1,\ -7,\ \cdots$

(2) 첫째항이 5이고, 제10항이 32인 등차수열

〔풀이〕

(1) 첫째항이 17

공차가 $11-17=-6$

이므로

$a_n=17+(n-1)\cdot(-6)=\square n+\square$

(2) 주어진 등차수열의 공차를 d라고 하면

$a_{10}=5+(10-1)d=32$에서

$9d=\square \quad \therefore d=\square$

$\therefore a_n=5+(n-1)\cdot\square=\square n+\square$

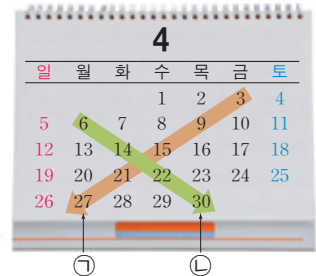
교과서 71, 72쪽

1 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같을 때, a_5와 a_{10}을 구하여라.

(1) $a_n=n^2-n$

(2) $a_n=1-(-2)^n$

교과서 73쪽

2 오른쪽 그림과 같이 달력에 두 화살표 ㉠, ㉡을 그었다. 두 화살표 ㉠, ㉡ 위에 있는 수들을 각각 화살표 방향으로 차례로 읽어 나갈 때, 그 규칙을 말하여라.

교과서 76, 77쪽

3 다음 등차수열에서 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

(1) $2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \cdots$

(2) $2,\ \frac{3}{2},\ 1,\ \frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ \cdots$

기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음 물음에 답하여라.

(1) 제5항이 -29이고, 제25항이 51인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

(2) 제3항이 -3이고, 제9항이 27인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

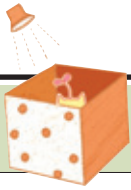
두 수열을 나열하고 공통인 항을 찾아봐.

2 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_n=2n+3$, $b_n=3n+2$일 때, 두 수열에서 공통으로 나타나는 수를 작은 것부터 나열한 수열 $\{c_n\}$의 일반항을 구하여라.

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

3 다음을 계산하여라.

$$100^2-99^2+98^2-97^2+\cdots+2^2-1^2$$

4 두 자리 자연수 중 3의 배수의 개수와 이들의 합을 구하여라.

등차중항을 이용하여 세 수 사이의 관계식을 세워 본다.

5 오른쪽 그림에서 가로줄과 세로줄에 있는 세 수가 각각 등차수열을 이룰 때, $(a-c)+(b-e)$의 값을 구하여라.

19	a	b
c	d	31
e	23	f

실력 키우기

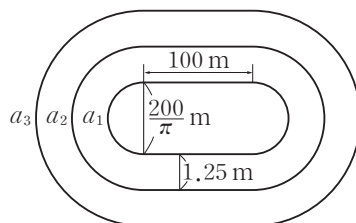
*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_3=11$, $a_6 : a_{10}=5 : 8$일 때, a_{20}을 구하여라.

2 등차수열 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{47}에서 홀수 번째 항들의 합이 240일 때, 첫째항부터 제47항까지의 합을 구하여라.

3 제1권부터 제7권까지 일곱 권의 연속물로 된 책이 있다. 각 권은 9년 간격으로 발행되었으며, 일곱 권의 발행 연도의 합은 13811년이었다. 제5권의 발행 연도를 구하여라.

4 첫째항이 50, 공차가 -4인 등차수열에서 첫째항부터 제몇항까지의 합이 최대가 되는지 구하고, 그때의 최댓값을 구하여라.

5 종합 운동장의 육상 트랙은 보통 8 레인으로 되어 있다. 각 레인은 오른쪽 그림과 같이 두 구간의 직선 경주로와 두 구간의 반원 경주로로 이루어져 있고, 각 레인의 폭은 1.25 m이다. 가장 안쪽부터 차례로 1, 2, 3, $\cdots$, 8레인이라고 할 때, 각 레인의 길이를 $a_i\,(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8)$라고 하자. 이때, a_8을 구하여라.
(단, 레인의 길이는 안쪽 가장자리의 길이이다.)

여러 가지 형태의 등차수열

1. 수열 $\{a_n\}$에서 일반항 a_n이 n에 대한 일차식이면 이 수열은 등차수열이다.

| 증명 | a_n이 n에 대한 일차식, 즉 $a_n=pn+q\ (p\neq0)$라고 하면 $\quad a_{n+1}-a_n=p$

즉, 연속된 두 항의 차가 일정한 상수 p이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

2. 수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합이 $pn^2+qn\ (p\neq0)$의 꼴이면 이 수열은 등차수열이다.

| 증명 | 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 $a_1+a_2+\cdots+a_n=pn^2+qn\ (p\neq0)$이므로

$n\geq2$일 때, $\quad a_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})$

$\qquad =pn^2+qn-p(n-1)^2-q(n-1)=2pn-p+q \qquad \cdots\cdots㉠$

$n=1$일 때, $\quad a_1=p+q$

$a_1=p+q$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로 $\quad a_n=2pn-p+q$

이때, 일반항 a_n이 n에 대한 일차식이므로 이 수열은 등차수열이다.

3. 수열 $\{a_n\}$이 등차수열을 이루면 다음 수열도 등차수열을 이룬다.

(1) $a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_7,\ a_9,\ \cdots$ (2) $a_1,\ a_4,\ a_7,\ a_{10},\ a_{13},\ \cdots$

(3) $a_1+a_2,\ a_3+a_4,\ a_5+a_6,\ \cdots$ (4) $a_1+a_2+a_3,\ a_4+a_5+a_6,\ a_7+a_8+a_9,\ \cdots$

| 증명 | 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 a이고, 공차가 d라고 하면

(1) $a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_7,\ a_9,\ \cdots$는 $a,\ a+2d,\ a+4d,\ a+6d,\ a+8d,\ \cdots$이므로 이 수열은 첫째항이 a이고, 공차가 $2d$인 등차수열이다.

(2) $a_1,\ a_4,\ a_7,\ a_{10},\ a_{13},\ \cdots$은 $a,\ a+3d,\ a+6d,\ a+9d,\ a+12d,\ \cdots$이므로 이 수열은 첫째항이 a이고, 공차가 $3d$인 등차수열이다.

(3) $a_1+a_2,\ a_3+a_4,\ a_5+a_6,\ \cdots$은 $2a+d,\ 2a+5d,\ 2a+9d,\ \cdots$이므로 이 수열은 첫째항이 $2a+d$이고, 공차가 $4d$인 등차수열이다.

(4) $a_1+a_2+a_3,\ a_4+a_5+a_6,\ a_7+a_8+a_9,\ \cdots$는 $3a+3d,\ 3a+12d,\ 3a+21d,\ \cdots$이므로 이 수열은 첫째항이 $3a+3d$이고, 공차가 $9d$인 등차수열이다.

2. 등비수열

* □ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

● 등비수열의 일반항

① 첫째항부터 차례로 일정한 수를 곱하여 만들어지는 수열을 등비수열이라 하고, 그 일정한 수를 공비라고 한다.

② 첫째항이 a이고, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n=ar^{n-1}$$

| 보기 | 첫째항이 4이고, 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=2^{\boxed{(1)\quad}}$$

● 등비중항

① 0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등비중항이라고 한다.

② 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루기 위한 필요충분조건은 $b^2=$ (2) □ 이다.

| 보기 | 2, 4, 8은 이 순서대로 등비수열을 이루므로 4는 2와 8의 (3) □ 이다.

● 등비수열의 합

첫째항이 a이고, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

(i) $r\neq1$일 때, $\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

(ii) $r=1$일 때, (4) □

| 보기 | (1) $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^8=2^{\boxed{(5)\quad}}-1$

(2) $\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\boxed{(6)\quad}}\right\}}{1-\dfrac{1}{2}}=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\boxed{(7)\quad}}$

···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 78~83쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) $n+1$ (2) ac (3) 등비중항 (4) na (5) 9 (6) 10 (7) 10

바 탕 다 지 기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함 께 하 기 |

1. 다음 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항과 첫째항부터 제10항까지의 합 S를 구하여라.

(1) $\frac{1}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{9}{2},\ \cdots$

(2) $\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1,\ \sqrt{2},\ 2,\ \cdots$

〔풀이〕

(1) 첫째항이 $\frac{1}{6}$, 공비가 3이므로

$$a_n=\frac{1}{6}\cdot 3^{n-1}=\frac{3^{n-2}}{2}$$

$$S=\frac{\frac{1}{6}(3^{10}-1)}{3-1}=\frac{3^{10}-1}{12}$$

(2) 첫째항이 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 공비가 $\sqrt{2}$이므로

$$a_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sqrt{2})^{n-1}=(\sqrt{2})^{n-2}$$

$$S=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\{(\sqrt{2})^{10}-1\}}{\sqrt{2}-1}$$

$$=31+\frac{31\sqrt{2}}{2}$$

| 스 스 로 하 기 |

1. 다음 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항과 첫째항부터 제10항까지의 합 S를 구하여라.

(1) $1,\ 5,\ 5^2,\ 5^3,\ \cdots$

(2) $4,\ -2,\ 1,\ -\frac{1}{2},\ \cdots$

〔풀이〕

(1) 첫째항이 1, 공비가 5이므로

$$a_n=1\cdot 5^{n-1}=5^{n-1}$$

$$S=\frac{1\cdot(5^{\square}-1)}{5-1}=\frac{5^{\square}-1}{4}$$

(2) 첫째항이 4, 공비가 $\square$이므로

$$a_n=4\cdot(\square)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

$$S=\frac{4\cdot\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-(\square)}$$

$$=\square\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$$

교과서 80쪽

1 다음 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하여라.

(1) $-1,\ 2,\ -4,\ 8,\ -16,\ \cdots$

(2) $8,\ 4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \cdots$

교과서 82, 83쪽

2 다음을 구하여라.

(1) 첫째항이 2, 공비가 4인 등비수열의 제8항까지의 합

(2) 첫째항이 1, 공비가 3, 끝항이 3^{20}인 등비수열의 합

기 본 익 히 기

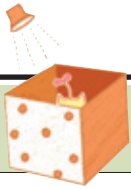
*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 각 항이 실수인 등비수열의 제2항이 -6, 제5항이 48일 때, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여라.

2 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열에서 1000보다 크게 되는 항은 제몇 항부터인지 구하여라.

3 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

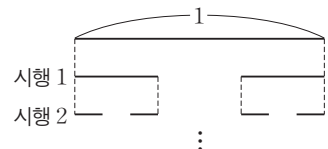
(1) $a_1+a_2=1$, $a_3+a_4=3$이고 공비가 양수일 때, a_5+a_6의 값을 구하여라.

(2) $a_1+a_2+a_3=1$, $a_4+a_5+a_6=8$이고 공비가 실수일 때, $a_1+a_3+a_5$의 값을 구하여라.

p, q, r가 이 순서대로
(1) 등비수열을 이루면
$q^2=pr$
(2) 등차수열을 이루면
$2q=p+r$

4 네 수 4, a, b, 24가 있다. 세 수 4, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루고, 세 수 a, b, 24가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, a, b의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

첫째항과 공비를 구한다.

5 첫째항부터 제4항까지의 합이 2, 첫째항부터 제8항까지의 합이 8인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제12항까지의 합을 구하여라.

6 길이가 1인 선분이 있다. 첫 번째 시행에서 이 선분을 삼등분하고 그 중간 부분을 버린다. 두 번째 시행에서는 첫 번째 시행의 결과로 남은 두 선분을 각각 삼등분하고 그 중간 부분을 버린다. 이와 같은 과정을 계속할 때, 20번째 시행 후 남은 선분의 길이의 합을 구하여라.

프 로 젝 트

도형을 이용한 등차중항과 등비중항

| 문제 | 도형의 성질을 이용하여 두 양수 a, b의 등차중항과 등비중항의 대소 관계를 조사하여 보자.

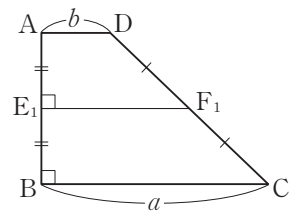
1단계_ 문제를 이해하여 보자.

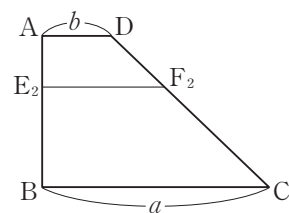
(1) 두 양수 a, b의 등차중항을 A, 등비중항을 G라고 할 때, A, G를 a와 b로 나타내어라.

(2) 두 수 1과 2의 등차중항과 등비중항을 구하고, 대소 관계를 말하여라.

2단계_ 계획을 세워 보자.

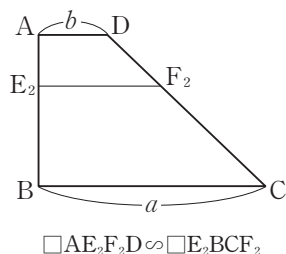
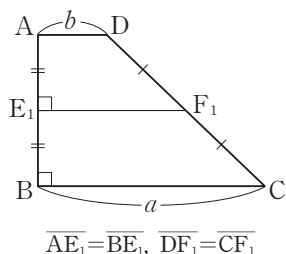
오른쪽 그림과 같이 아랫변의 길이가 a이고, 윗변의 길이가 b인 사다리꼴 ABCD에서 다음을 구하여 보자.

(1) $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 중점을 각각 E_1, F_1이라고 할 때, $\overline{E_1F_1}$의 길이를 a, b로 나타내어라.

*수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용해 보는 문제입니다.

(2) $\square AE_2F_2D \backsim \square E_2BCF_2$가 되도록 E_2, F_2를 각각 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 위에 잡을 때, $\overline{E_2F_2}$의 길이를 a, b로 나타내어라.

3단계_ **계획을 실행하여 보자.**

다음 각 그림에서 $\overline{E_1F_1}$, $\overline{E_2F_2}$의 길이를 자로 재어 보고, 부등식 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$가 성립하는지 알아보아라.

$\overline{AE_1}=\overline{BE_1}$, $\overline{DF_1}=\overline{CF_1}$

$\square AE_2F_2D \backsim \square E_2BCF_2$

논술/수행평가 과제

1. 두 양수 a, b의 등차중항과 등비중항이 같을 때는 언제인지 말하여 보자.

2. 이를 이용하여 산술평균과 기하평균의 관계를 설명하여 보자.

실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 2이고 공비가 3인 등비수열일 때, 다음 수열은 어떤 수열인지 설명하여라.

(1) $\{{a_n}^2\}$　　(2) $\{\log a_n\}$

2 첫째항부터 제n항까지의 합이 $3^{n+1}-3$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}$의 값을 구하여라.

3 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합이 20, 첫째항부터 제$2n$항까지의 합이 30일 때, 첫째항부터 제$3n$항까지의 합을 구하여라.

첫째항이 a이고, 공비가 r인 등비수열의 합은 $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

4 등비수열 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\cdots$에서 첫째항부터 제몇항까지의 합을 구하면 처음으로 그 합과 2의 차가 0.01보다 작아지겠는지 구하여라.

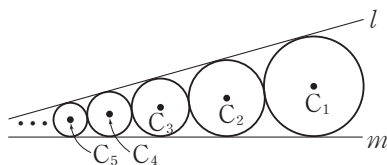
5 어떤 세포를 1회 배양하면 그중 10 %는 죽고, 나머지는 각각 10개의 세포로 분열된다고 한다. 이 세포 10개를 가지고 위와 같이 10회 배양하였을 때의 세포의 개수를 구하여라.

도형과 등비수열

규칙적으로 같은 모양이 반복되는 도형에서 등비수열을 이루는 것을 찾을 수 있다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 사이의 관계식이 다음과 같으면 이 수열은 등비수열이다.

$$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$$

오른쪽 그림과 같이 두 직선 l, m을 공통접선으로 하는 원 C_1, C_2, C_3, $\cdots$이 외접하고 있다.

연속으로 외접하는 세 원의 반지름의 길이를 각각

r_k, r_{k+1}, r_{k+2} $(r_k > r_{k+1} > r_{k+2},\ k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

라고 하면 오른쪽 그림에서 $\triangle C_kC_{k+1}T \backsim \triangle C_{k+1}C_{k+2}S$이므로

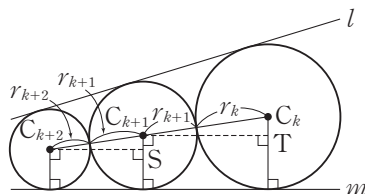
$$\overline{C_kC_{k+1}} : \overline{C_{k+1}C_{k+2}} = \overline{C_kT} : \overline{C_{k+1}S}$$

즉, $(r_k + r_{k+1}) : (r_{k+1} + r_{k+2}) = (r_k - r_{k+1}) : (r_{k+1} - r_{k+2})$

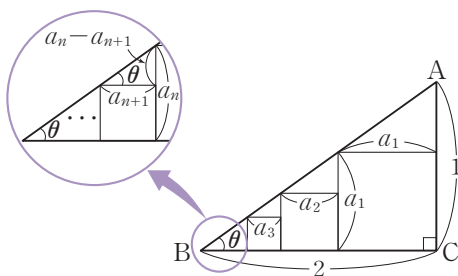
에서

$$r_{k+1}^2 = r_k r_{k+2}$$

이므로 수열 $\{r_k\}$는 등비수열을 이룬다.

한편 두 개의 공통접선에 연속으로 외접하는 원의 넓이로 이루어진 수열도 등비수열을 이룬다.

확인학습 **1** 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 차례로

a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$

이라고 하자. 이때, a_{10}을 구하여라.

2 수열의 합

학습 목표

- 합의 기호 $\sum$의 뜻과 성질을 이해하고, 계차수열에 대하여 안다.
- 수열을 활용하여 실생활의 문제를 해결할 수 있다.

1. 수열의 합과 그 활용

대형 매장에서는 상품을 진열할 때, 고객의 시선을 끌기 위하여 여러 가지 형태로 배열한다. 이러한 배열 중에는 n 번째 줄에 진열된 상품의 개수와 $(n+1)$ 번째 줄의 상품의 개수의 차가 규칙을 이루는 경우가 있다. 이러한 규칙을 알면 각 열에 있는 상품의 개수를 구할 수 있고, 이들 전체의 합도 쉽게 구할 수 있다.

이와 같이 수열의 합을 활용하면 생활 속의 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

수열의 합에 들어가기 전에

1. 다항식의 전개

(1) $(x+1)^2=x^2+2x+1$

(2) $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$

1 다음의 전개식에서 x^2의 계수와 x의 계수를 구하여라.

(1) $(2x+1)^2$

(2) $(x+2)^3$

(3) $(2x+1)^3$

2. 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고, m, n이 자연수일 때

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^m = a^m b^m$

(4) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (단, $m>n$)

2 다음을 구하여라.

(1) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \times 5^2 \div 2$

(2) $3^5 \times (3^3)^2 \div 3^4$

3. 등차수열의 합

첫째항이 a, 공차가 d, 제n항이 l인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\frac{n(a+l)}{2}=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

3 다음 등차수열의 합을 구하여라.

(1) $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 20$

(2) $1,\ 4,\ 7,\ 10,\ \cdots,\ 28$

4. 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

(i) $r\neq1$일 때, $\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

(ii) $r=1$일 때, na

4 다음 등비수열의 합을 구하여라.

(1) $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots,\ 2^{20}$

(2) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots,\ \frac{1}{2^{20}}$

1. 수열의 합과 그 활용

* □ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

합의 기호 $\sum$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 합의 기호 $\sum$를 사용하여 나타내면

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} \boxed{(1)\quad}$$

자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\boxed{(2)\quad}$

③ $\sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

계차수열

① 수열 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, a_{n+1}, $\cdots$에 대하여 b_n을 $a_{n+1}-a_n=b_n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$과 같이 정의할 때, 수열 $\{b_n\}$을 수열 $\{a_n\}$의 계차수열이라고 한다.

| 보기 | 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, $\cdots$

3, (3) □, 7, 9, 11, (4) □, $\cdots$

수열 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, $\cdots$의 계차수열은 첫째항이 (5) □이고, 공차가 2인 등차수열이다.

② 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 할 때, 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k \ (\text{단, } n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

원리합계

원금을 P, 이율을 i, 기간을 n이라고 할 때

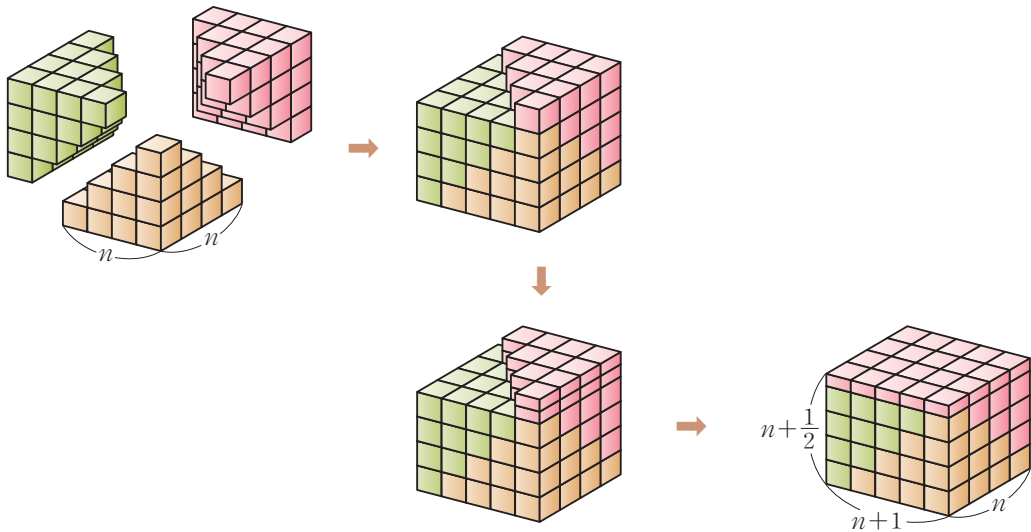
① 단리법에 의한 이자 I와 원리합계 S는 $I=P\times i\times n$, $S=P(\boxed{(6)\quad})$

② 복리법에 의한 원리합계 S는 $S=P\times\boxed{(7)\quad}$

··· 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 86~95쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) a_k (2) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (3) 5 (4) 13 (5) 3 (6) $1+i\times n$ (7) $(1+i)^n$

도형을 이용한 자연수의 거듭제곱의 합

(1) $3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)$ ➡ $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(2) $1\times1^2+2\times2^2+3\times3^2+\cdots+n\times n^2$

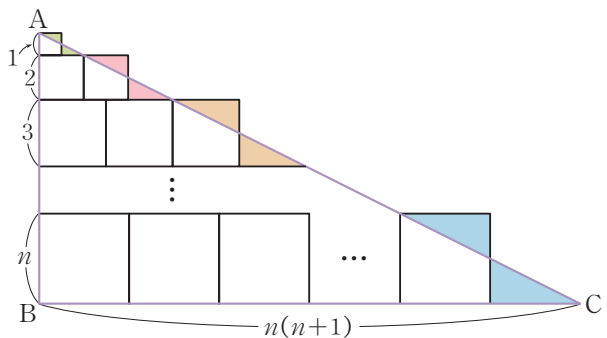
$=\triangle ABC$

$=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}$

$=\frac{1}{2}(1+2+3+\cdots+n)\cdot n(n+1)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot n(n+1)$

$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

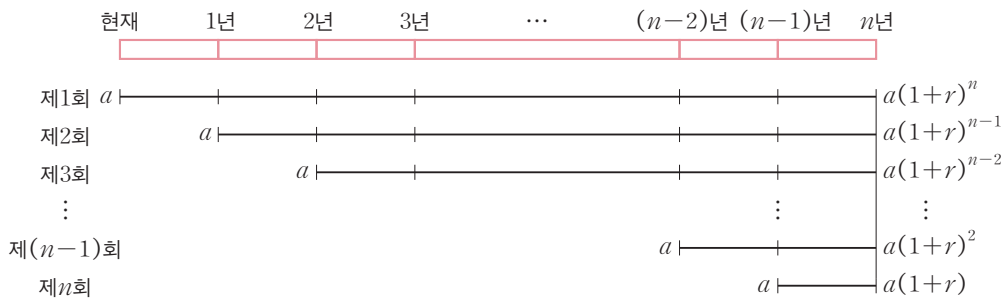
➡ $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

적금의 원리합계

매년 초에 일정한 금액 a원을 적립할 때, 이 적립금의 n년 후의 원리합계를 구하여 보자.

(단, 연이율은 r이고 1년마다 복리로 계산한다.)

맨 처음 적립한 a원은 n년 후에 찾으므로 그 원리합계는 $a(1+r)^n$ (원)

2회째 적립한 a원은 $(n-1)$년 후에 찾으므로 그 원리합계는 $a(1+r)^{n-1}$ (원)

⋮

이와 같이 n회에 걸친 원리합계는 등비수열을 이루므로 등비수열의 합의 공식을 이용하여 구하면 된다.

즉, 구하는 적립금의 원리합계는

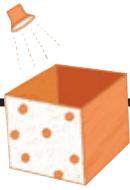
$$a(1+r)+a(1+r)^2+\cdots+a(1+r)^n$$

이것은 첫째항이 $a(1+r)$, 공비가 $(1+r)$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)-1}=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}\text{(원)}$$

확인학습

1 연이율이 6 %인 복리로 매년 초에 300,000원씩 적립할 때, 10년 후의 원리합계를 구하여라. (단, $1.06^{10}=1.791$로 계산한다.)

2 월이율이 1 %인 복리로 매월 초에 a원씩 적립하여 1년 후에는 1,000,000원이 되게 하려고 한다. 이때, 적립금 a를 구하여라.
(단, $1.01^{12}=1.13$으로 계산하고, 계산값은 반올림하여 원 단위로 구한다.)

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께하기 |

1. 다음 식을 기호 $\sum$를 사용하여 나타내어라.

(1) $2+4+6+\cdots+2n$

(2) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)$

〔풀이〕

(1) $2+4+6+\cdots+2n=\sum_{k=1}^{n}2k$

(2) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)$

$=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+k(k+1)+\cdots+n(n+1)$

$=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$

2. $\sum_{k=1}^{n}k(k-1)$을 구하여라.

〔풀이〕

$\sum_{k=1}^{n}k(k-1)$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)$

$=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\dfrac{n(n+1)}{2}$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1-3)}{6}$

$=\dfrac{n(n+1)(n-1)}{3}$

| 스스로 하기 |

1. 다음 식을 기호 $\sum$를 사용하여 나타내어라.

(1) $1+3+5+\cdots+(2n-1)$

(2) $1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots+10\cdot21$

〔풀이〕

(1) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(\boxed{})$

(2) $1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots+10\cdot21$

$=1\cdot3+2\cdot5+3\cdot7+\cdots+k(2k+1)+\cdots+10\cdot21$

$=\sum_{k=1}^{10}\boxed{}$

2. $\sum_{k=1}^{n}k(k+2)$를 구하여라.

〔풀이〕

$\sum_{k=1}^{n}k(k+2)$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)$

$=\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\cdot\dfrac{\boxed{}(n+1)}{2}$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1+\boxed{})}{6}$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+\boxed{})}{6}$

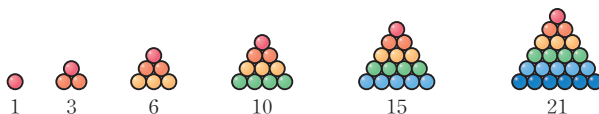
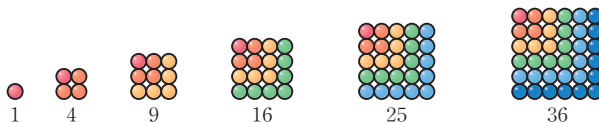
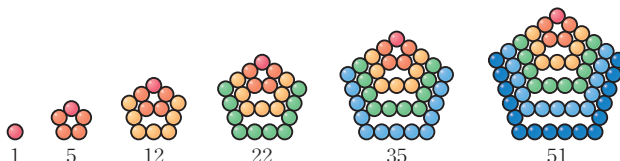
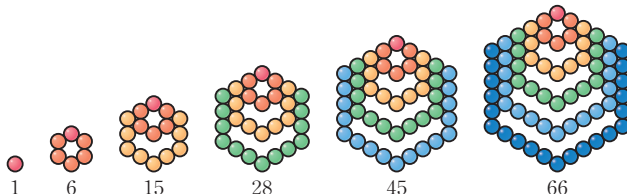
교과서 91, 92쪽

1 계차수열을 이용하여 수열 2, 4, 8, 14, 22, …의 제20항을 구하여라.

교과서 93쪽

2 원금 400,000원을 월이율 0.5 %의 단리로 3개월 동안 예금하였을 때, 이자를 구하여라.

도형수(figulate number)와 계차수열

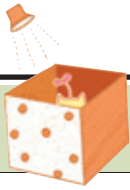
다음 그림과 같이 ●를 늘어 놓으면 각각의 ●의 개수로 수열이 이루어진다. 이때, 정삼각형이 되는 수를 '삼각수', 정사각형이 되는 수를 '사각수', 정오각형이 되는 수를 '오각수', …라고 한다.

각각의 수열의 일반항 a_n을 계차수열을 이용하여 구할 수 있다.

	수열	계차수열	
삼각수	1, 3, 6, 10, 15, 21, ⋯	2, 3, 4, 5, 6, ⋯	➡ 공차가 1인 등차수열
사각수	1, 4, 9, 16, 25, 36, ⋯	3, 5, 7, 9, 11, ⋯	➡ 공차가 2인 등차수열
오각수	1, 5, 12, 22, 35, 51, ⋯	4, 7, 10, 13, 16, ⋯	➡ 공차가 3인 등차수열
육각수	1, 6, 15, 28, 45, 66, ⋯	5, 9, 13, 17, 21, ⋯	➡ 공차가 4인 등차수열

삼각수의 일반항 $a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=\frac{n^2+n}{2}$

사각수의 일반항 $a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)=n^2$

오각수의 일반항 $a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k+1)=\frac{3n^2-n}{2}$

육각수의 일반항 $a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+1)=2n^2-n$

기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1 다음 등식을 만족하는 자연수 n의 값을 구하여라.

(1) $1+2+3+\cdots+n=120$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=285$

2 다음 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여라.

(1) $1\cdot4,\ 2\cdot5,\ 3\cdot6,\ 4\cdot7,\ \cdots$

(2) $1^2\cdot2,\ 2^2\cdot3,\ 3^2\cdot4,\ 4^2\cdot5,\ \cdots$

3 다음 수열의 일반항 a_n과 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여라.

(1) $1,\ 3,\ 9,\ 19,\ 33,\ 51,\ 73,\ \cdots$

(2) $1,\ 3,\ -1,\ 7,\ -9,\ 23,\ -41,\ \cdots$

4 다음을 구하여라.

(1) 원금 500,000원을 연이율 5 %의 단리로 3년 동안 예금하였을 때, 원리합계를 구하여라.

(2) 원금 500,000원을 연이율 4 %의 복리로 4년 동안 예금하였을 때, 원리합계를 구하여라. (단, 계산값은 반올림하여 원 단위로 구한다.)

5 다음 그림과 같이 같은 크기의 공이 정사면체 모양으로 서로 외접하게 쌓여 있다. 한 모서리에 공이 7개 있고, 내부가 모두 채워져 있을 때, 전체 공의 개수를 구하여라.

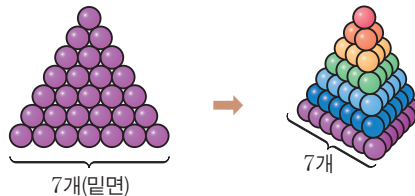
실 력 키 우 기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 다음 합을 구하여라.

(1) $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)$

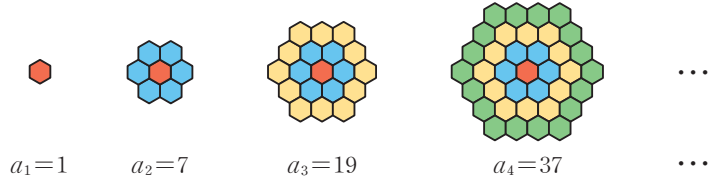
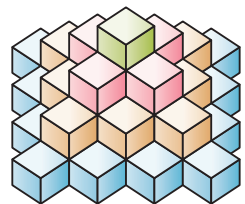
(2) $1+(1+2)+(1+2+2^2)+\cdots+(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})$

2 1부터 10까지의 자연수를 적당히 나열한 것을 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{10}이라 고 할 때, $1\cdot a_1+2\cdot a_2+3\cdot a_3+\cdots+10\cdot a_{10}$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

계차수열을 구하고, 이를 활용하여 수열의 규칙을 알아본다.

3 다음 수열 $\{a_n\}$에서 a_{99}와 a_{100}을 구하여라.

1, 2, 3, 6, 9, 14, 19, 26, $\cdots$

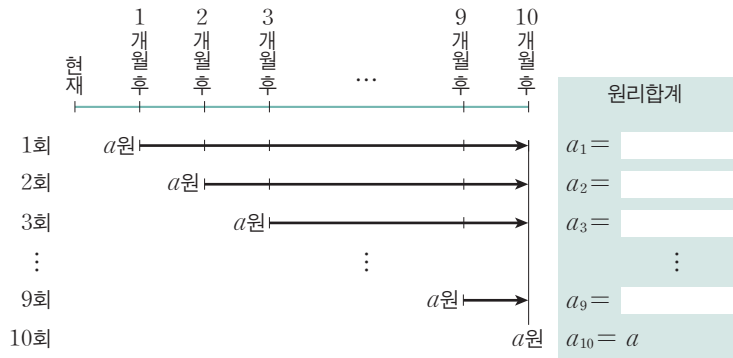
4 다음 그림과 같이 정육각형을 배열할 때, n 번째 그림에 있는 정육각형의 개수 a_n을 구하여라.

$a_1=1$ $a_2=7$ $a_3=19$ $a_4=37$ $\cdots$

5 쌓기 나무 44개로 오른쪽 그림과 같은 모양의 4층 탑을 쌓았다. 이와 같은 규칙으로 10층 탑을 쌓을 때, 필요한 쌓기 나무의 총 개수를 구하여라.

프 로 젝 트

*수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용해 보는 문제입니다.

할부금

| 문제 | 이달 초에 200만 원짜리 컴퓨터를 구입하였다. 컴퓨터 구입 대금은 이달 말부터 매월 말에 a원씩 10회에 걸쳐 지급하려고 한다. 월이율 1 %의 복리로 계산할 때, 할부금 a를 구하여 보자. (단, $1.01^{10}=1.10$으로 계산한다.)

1단계_ 매회의 할부금 a원에 대한 9개월 후, 8개월 후, $\cdots$, 0개월 후의 원리합계를 차례로 a_1, a_2, $\cdots$, a_9, a_{10}이라고 할 때, 이들을 각각 구하여 빈칸에 써넣어라.

2단계_ 1단계에서 구한 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{10}의 합 $S=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$을 a로 나타내어라.

3단계_ 컴퓨터 대금 200만 원에 대한 10개월 후의 원리합계 T를 구하여 보자.

4단계_ $S=T$를 만족하는 할부금 a를 구하여 보자.

III 대단원 확인하기

이해

1 ★

다섯 개의 수 a, b, 6, c, d가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

계산

2 ★★

첫째항부터 제10항까지의 합이 10, 첫째항부터 제20항까지의 합이 40인 등차수열의 첫째항부터 제30항까지의 합을 구하여라.

계산

3 ★

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=7$, $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=4$일 때, 이 수열의 공비를 구하여라.

이해

4 ★★

0이 아닌 두 실수 a, b 사이에 두 수 x, y를 넣어서 만든 네 수 a, x, y, b가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) x, y를 각각 a, b로 나타내어라.

(2) $a=8$, $b=27$일 때, 실수 x, y의 값을 구하여라.

문제 해결

5 ★★

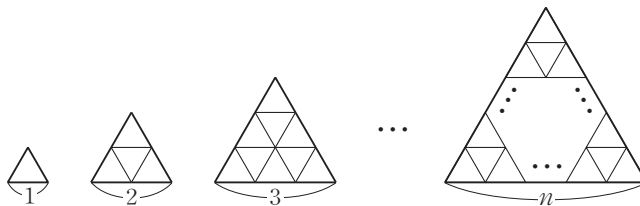
다음 그림과 같이 한 변의 길이가 n인 정삼각형의 각 변을 n등분하고 각 분점을 잇는다. 이때, n 번째 만들어지는 삼각형에서 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 개수를 구하여라.

⋯
계산

6 ★★

$\sum_{k=1}^{10} k(k+1)^2$의 값을 구하여라.

이해

7 ★★

수열 1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, $\cdots$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여라.

창의성

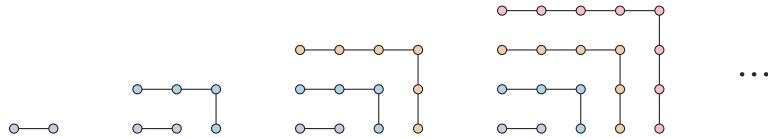
8 ★★★

수열 2, 6, 12, 20, 30, 42, $\cdots$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

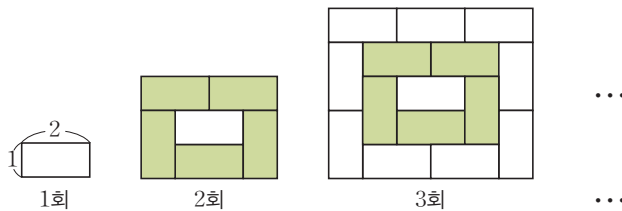
(1) 계차수열을 이용하여 주어진 수열의 일반항을 구하여라.

(2) 다음 그림을 이용하여 주어진 수열의 일반항을 구하여라.

문제 해결

9 ★★★

다음 그림과 같이 가로와 세로의 길이가 각각 2, 1인 직사각형 모양의 타일을 붙이고, 그 둘레에 크기가 같은 타일을 빈틈없이 붙이는 작업을 계속한다. 홀수 회째와 짝수 회째에 다른 색의 타일을 붙일 때, 이와 같은 작업을 10회째까지 반복하여 완성한 도형에서 흰색 타일의 총개수를 구하여라.

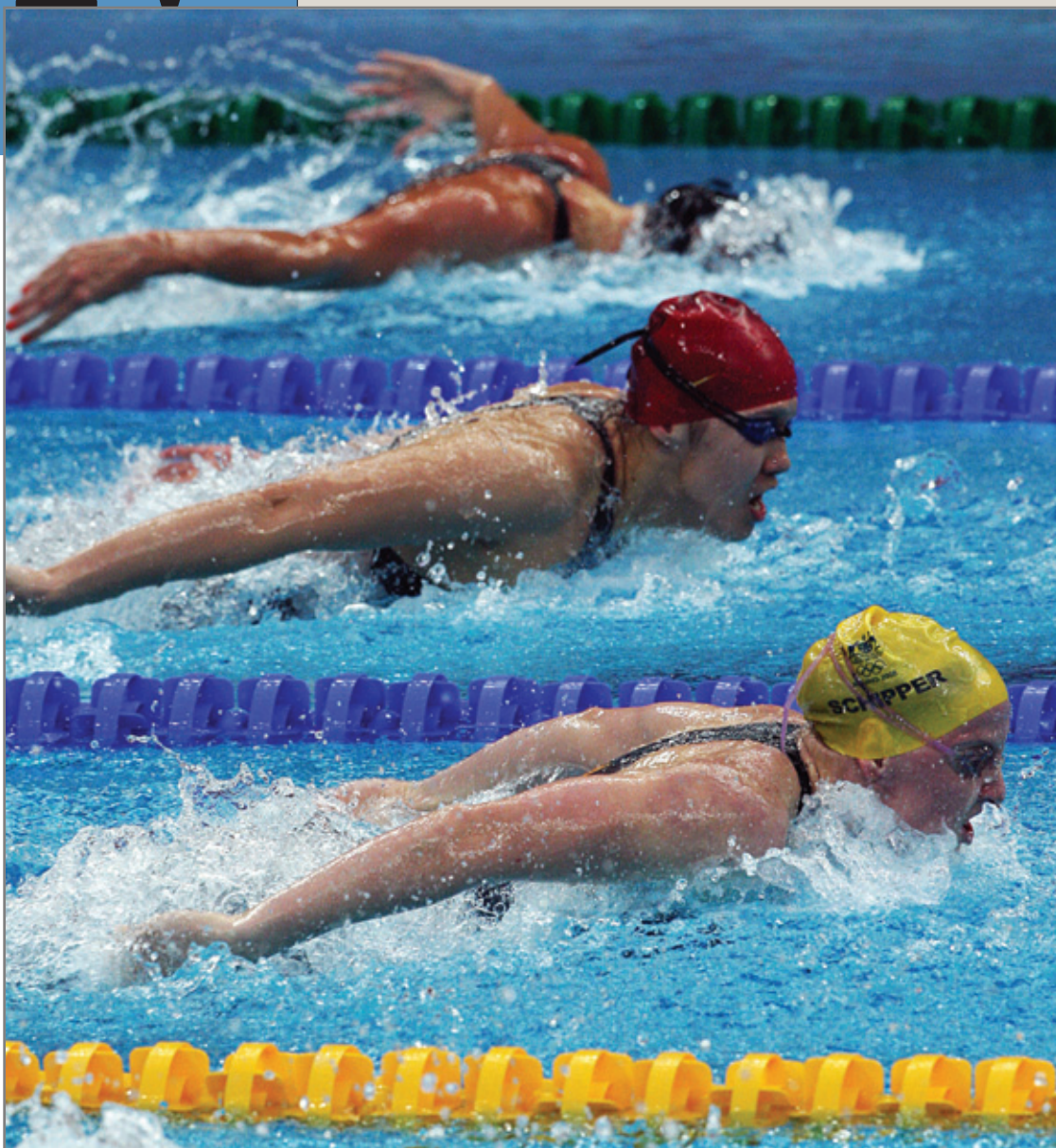
의사소통

10 ★★

다음 물음에 답하여라.

(1) 원금 1,000,000원을 월이율 1 %의 단리로 예금하였을 때, 5개월 후의 원리합계를 구하여라.

(2) 원금 1,000,000원을 월이율 1 %의 복리로 예금하였을 때, 5개월 후의 원리합계를 구하여라. (단, 계산값은 반올림하여 원 단위로 구한다.)

(3) (1), (2)에서 구한 금액의 차이를 말하여라.

IV 확률과 통계

땀과 눈물의 결정체인 운동 경기의 결과에는 우연성도 숨어 있다.
그러나 성공은 우연히 찾아오는 것이 아니라
각고의 노력 끝에 찾아낸 필연의 산물이다.

확률론의 정립자 콜모고로프

_Kolmogorov, A. N ; 1903~1987

콜모고로프는 1933년에 출간한 그의 논문 '확률론의 기초 개념(Grundbegriffe der Wahrscheinlich keitsre-chnung)' 에서 기본적인 공리를 도입하여 확률론의 체계를 정립하였다. 이것은 힐베르트(Hilbert, D. ; 1862~1943)가 1901년 제1회 국제 수학자 대회에서 언급한 확률 부분에 대한 문제를 해결하는 이론으로 그의 대표적인 업적이다.

또 1938년에는 마르코프 이론에 대한 기초를 마련하여 확률론에서의 해석적 방법을 발표하였다.

러시아에서 가장 유명한 영재 학교의 이름이 '콜모고로프 수학 학교' 인데, 이것은 콜모고로프의 업적을 기리기 위하여 그의 이름을 붙인 것이다. 그는 말년에는 이 학교의 교장으로 재직하면서 수학 교육의 발전에 기여하였다.

1 확률과 그 활용

학습 목표
- 확률의 뜻을 알 수 있다.
- 확률의 기본 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

1. 확률의 뜻과 기본 성질

야구 중계나 일기 예보에는 확률이라는 단어가 자주 등장한다. 또 로또에 당첨될 확률, 시험에 합격할 확률 등과 같이 확률이라는 단어는 이제 일상생활의 용어가 되었으며, 우리의 의사 결정에 있어서 빠질 수 없는 중요한 요소가 되었다.

확률과 그 활용에 들어가기 전에

1. 유한집합의 원소의 개수

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

① $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

특히 $A\cap B=\varnothing$일 때, $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

② $n(A^C)=n(U)-n(A)$

1 전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$의 두 부분집합 A, B가

$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$,

$B=\{2, 3, 5, 7\}$

일 때, 다음을 구하여라.

(1) $n(A\cap B)$ (2) $n(A\cup B)$

(3) $n(A^C)$ (4) $n(A-B)$

2. 사건 A 또는 B가 일어나는 경우의 수

두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이고, 이들이 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A 또는 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

2 1에서 100까지의 숫자가 각각 적혀 있는 100장의 카드에서 임의로 한 장을 뽑을 때, 11 또는 13의 배수가 나오는 경우의 수를 구하여라.

3. 사건 A와 B가 동시에 일어나는 경우의 수

사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A와 B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m\times n$이다.

3 주사위 1개와 동전 1개를 동시에 던져서 위에 나오는 면을 조사할 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수를 구하여라.

4. 순열

① 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 순서대로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라 하고, 이 순열의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{P}_r$와 같이 나타낸다.

② ${}_n\mathrm{P}_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ (단, $0<r\le n$)

③ ${}_n\mathrm{P}_n=n!$, ${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$, $0!=1$, ${}_n\mathrm{P}_0=1$

4 네 개의 숫자 1, 2, 3, 4 중 서로 다른 세 숫자를 사용하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수를 구하여라.

5. 조합

① 서로 다른 n개에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 이 조합의 수를 기호 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같이 나타낸다.

② ${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

③ ${}_n\mathrm{C}_0=1$, ${}_n\mathrm{C}_n=1$, ${}_n\mathrm{C}_1=n$, ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$

5 원 위에 n개의 점이 있다. 이들 점 중 6개를 택하여 만들 수 있는 육각형의 개수와 8개를 택하여 만들 수 있는 팔각형의 개수가 서로 같을 때, n의 값을 구하여라.

1. 확률의 뜻과 기본 성질

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

수학적 확률

어떤 시행의 표본공간 S가 n개의 근원사건으로 이루어져 있고, 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대된다고 하자. 이때, 사건 A가 r개의 근원사건으로 이루어져 있으면 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\boxed{(1)}}{n}$$

와 같이 정의하고, 이것을 수학적 확률이라고 한다.

통계적 확률

어떤 시행을 n번 반복할 때, 사건 A가 r_n번 일어난다고 하자. 이때, n을 한없이 크게 함에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워지면 $\boxed{(2)}$를 사건 A가 일어날 통계적 확률이라고 한다. 일정한 값 p를 구하기 어려울 때에는 시행 횟수 n이 충분히 클 때의 상대도수 $\frac{r_n}{n}$을 보통 그 사건의 통계적 확률로 본다.

확률의 기본 성질

① 임의의 사건 A에 대하여 $\boxed{(3)}\le \mathrm{P}(A)\le 1$

② 반드시 일어나는 사건 S에 대하여 $\mathrm{P}(S)=\boxed{(4)}$

③ 절대로 일어나지 않는 사건 $\varnothing$에 대하여 $\mathrm{P}(\varnothing)=\boxed{(5)}$

확률의 덧셈정리

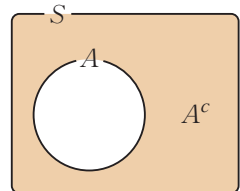
① 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\boxed{(6)}$

② 두 사건 A, B가 $A\cap B=\varnothing$이면 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

여사건의 확률

① 어떤 시행에서 사건 A가 일어나지 않는 사건을 A의 여사건이라 하고, 기호로 A^C과 같이 나타낸다.

② 임의의 사건 A에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A) \text{ 또는 } \mathrm{P}(A)=1-\boxed{(7)}$$

…→ 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 102~111쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) r (2) p (3) 0 (4) 1 (5) 0 (6) $\mathrm{P}(A\cap B)$ (7) $\mathrm{P}(A^C)$

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 1부터 100까지의 자연수가 각각 적힌 100장의 카드 중 한 장을 뽑을 때, 그 수가 3의 배수일 확률을 구하여라.

〔풀이〕
카드 한 장을 뽑는 모든 경우의 수는 100가지이다.
또 100 이하의 자연수 중 3의 배수가 뽑힐 경우의 수는

3, 6, 9, ⋯, 96, 99

의 33가지이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{33}{100}$이다.

2. 어느 농구 선수가 200번의 자유투를 던져서 170번 성공하였다. 이 선수가 자유투를 한 번 던질 때, 성공할 확률을 구하여라.

〔풀이〕
200번의 시행 중 성공한 횟수가 170번이므로 이에 대한 상대도수는

$$\frac{170}{200}=\frac{17}{20}$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{17}{20}$이다.

| 스스로 하기 |

1. 1부터 50까지의 자연수가 각각 적힌 50장의 카드 중 한 장을 뽑을 때, 그 수가 7의 배수일 확률을 구하여라.

〔풀이〕
카드 한 장을 뽑는 모든 경우의 수는 50가지이다.
또 50 이하의 자연수 중 7의 배수가 뽑힐 경우의 수는

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49

의 ☐가지이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{\square}{50}$이다.

2. 어느 양궁 선수가 화살을 500발 쏘아서 과녁의 10점 칸을 285발 맞혔다. 이 선수가 화살을 한 발 쏠 때, 10점 칸을 맞힐 확률을 구하여라.

〔풀이〕
500번의 시행 중 10점 칸에 맞힌 횟수가 285회이므로 이에 대한 상대도수는

$$\frac{\square}{500}=\square$$

따라서 구하는 확률은 ☐이다.

교과서 105쪽

1 남학생 4명, 여학생 3명 중 대표 2명을 뽑을 때, 남학생 1명, 여학생 1명이 뽑힐 확률을 구하여라.

교과서 110쪽

2 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 3의 배수 또는 4의 배수일 확률을 구하여라.

교과서 111쪽

3 빨간색 연필 7자루와 파란색 연필 3자루가 들어 있는 필통에서 임의로 3자루의 연필을 꺼낼 때, 적어도 한 자루가 파란색 연필일 확률을 구하여라.

기본 익히기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 다음을 구하여라.

(1) 나오는 눈의 수가 같을 확률

(2) 나오는 눈의 수의 합이 8일 확률

(3) 나오는 눈의 수의 곱이 어떤 자연수의 제곱일 확률

2 강정 한 세트에 쌀강정이 7개, 보리강정이 3개 들어 있다. 이 중 4개를 꺼낼 때, 쌀강정이 2개, 보리강정이 2개 나올 확률을 구하여라.

3 30장의 복권 중 1등 1장, 2등 5장, 3등 10장의 당첨 복권이 있다. 이 복권 중 2장을 고를 때, 다음 확률을 구하여라.

(1) 2장 모두 당첨 복권이 아닐 확률

(2) 적어도 1장은 당첨 복권일 확률

3개 모두 흰 공이 나올 확률을 생각해야 한단다.

4 주머니 속에 흰 공과 검은 공이 모두 합하여 10개가 들어 있다. 이 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼내 보고 다시 넣는 시행을 여러 번 반복하였더니 6번에 1번 꼴로 3개가 모두 흰 공이었다. 이 주머니 속에 들어 있는 흰 공의 개수를 추측하여라.

$(\text{타율})=\frac{(\text{안타 수})}{(\text{타석 수})}$

5 어느 야구 선수의 지난 시즌까지의 통산 타율이 0.305이었다. 이 선수가 이번 시즌에 200번의 타석에서 칠 수 있는 안타의 개수를 추측하여라.

실 력 키 우 기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=0.4,\ \mathrm{P}(B^C)=0.3,\ \mathrm{P}(A\cup B)=0.95$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값을 구하여라.

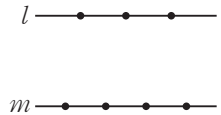
원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수는 2^n개이다.

2 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 부분집합 중 한 개를 택할 때, 그 부분집합에 원소 2가 속해 있을 확률을 구하여라.

3 6개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 서로 다른 숫자 네 개를 뽑아 네 자리 정수를 만들 때, 이 정수가 3400보다 클 확률을 구하여라.

! 오류 피하기
일직선 위에 있는 3개의 점 또는 4개의 점에서는 삼각형이 만들어지지 않는다.

4 오른쪽 그림과 같이 평행한 두 직선 l, m 위에 각각 3개, 4개의 점이 있다. 이 중 3개의 점을 택하여 모두 이을 때, 그것이 삼각형이 될 확률을 구하여라.

문제에 '적어도' 라는 말이 나오면 여사건의 확률을 떠올려 봐!

5 10개의 CD 중 4개의 CD를 뽑을 때, 적어도 하나의 공 CD를 뽑을 확률은 $\frac{13}{14}$이다. 공 CD의 개수를 구하여라.

통계적 확률에서 고려하여야 할 사항

주사위를 던질 때, 1의 눈이 나오는 통계적 확률은 다음과 같은 상대도수로 생각한다.

$$\frac{(1\text{의 눈이 나온 횟수})}{(\text{전체 시행 횟수})}=\frac{r_n}{n}$$

여기서 n을 충분히 크게 할 때, 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 어떤 값$\left(\text{이를테면 } \frac{1}{6}\right)$에 가까이 가게 된다면 $\frac{r_n}{n}$이 가까이 가는 값을 통계적 확률이라고 한다.

이러한 통계적 확률의 의미에서 고려하여야 할 다음 세 가지 사항에 대하여 알아보자.

첫째, 시행 횟수 n을 충분히 크게 한다는 것은 무슨 뜻인가? 어느 정도의 n이면 충분히 크다고 볼 수 있는가? n이 100이면 충분히 큰 것인가? 아니면 n이 백만 정도는 되어야 충분히 큰 것인가? 이러한 의문에 대한 답(누구나 그렇다고 인정하는 답)은 없다. 가장 그럴듯한 답은 '충분히 크다고 느낄만큼 크면 그것이 충분히 큰 n이다.' 일 것이다.

그러나 이러한 답에 선뜻 수긍하기는 어렵다.

따라서 통계적 확률을 구할 때, 시행 횟수 n을 정하는 일을 신중히 생각하여야 한다.

둘째, 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 어떤 값에 가까이 간다는 뜻은 무엇인가? $\frac{r_n}{n}$이 어떤 값에 가까이 간다고 할 수 있는가? 어떤 수열 $\{a_n\}$에서 a_n이 a에 가까이 가느냐, 아니냐를 수학적으로 판정하는 것은 그리 어렵지 않은 일이다. 그러나 상대도수 $\frac{r_n}{n}$으로 이루어지는 수열에서는 일반항을 찾을 수 없기 때문에 이 수열의 수렴 여부를 판정하는 것은 쉬운 일이 아니다.

셋째, 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 가까이 가는 구체적인 값은 무엇인가? 즉, $\frac{r_n}{n}$의 극한값은 무엇인가? 주사위를 던질 때, 1의 눈이 나오는 상대도수 $\frac{r_n}{n}$의 극한값은 $\frac{1}{6}$이라고 많은 사람들은 의심 없이 믿고 있다. 그러나 윷을 던질 때, 윷 등이 나오는 상대도수 $\frac{r_n}{n}$에 대한 극한값은 아무도 언급을 하지 않고 있다. 그 이유는 주사위 던지기에서는 수학적 확률을 생각하기가 쉽고, 윷 던지기에서는 어렵기 때문이다. 다시 말하면 통계적 확률의 구체적인 값을 구하기는 매우 어려운 것이다.

프 로 젝 트

* 수학적 개념을 보다 깊이 있게 탐구하고 적용해 보는 문제입니다.

카오스 게임_ 혼돈에서 질서로

주사위를 던질 때, 윗면에 나오는 눈의 수를 항상 정확히 알아 맞힐 사람은 아무도 없다. 윗면에 나오는 눈의 수는 어떤 규칙에 의하여 나타나는 것이 아니고 단지 우연에 의한 것이기 때문이다. 즉, 주사위 던지기에서 각 시행의 결과에 대하여 우리는 '혼돈(混沌, chaos)' 의 상태에 있는 것이다.

그러나 이 시행을 여러 번 반복하면 규칙성을 찾을 수 있다.
통계학은 이와 같이 무질서하게 보이는 현상에서 규칙을 찾고, 수학적 모형을 세워 나가는 학문이라고 볼 수 있다.
다음과 같은 게임을 하여 보자.

1단계_ 정삼각형 ABC를 그리고, 삼각형의 변 위에 임의의 점을 찍는다.

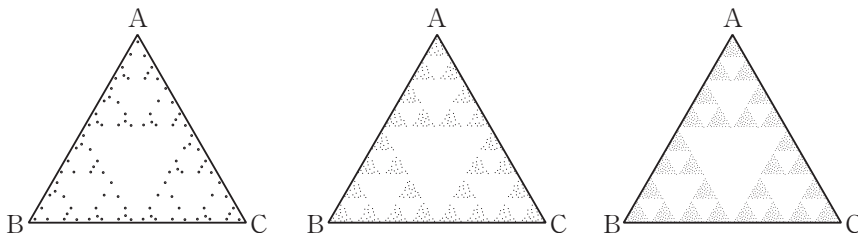
2단계_ 주사위를 던져서 나온 눈의 수에 따라 다음과 같이 새로운 점을 찍는다.

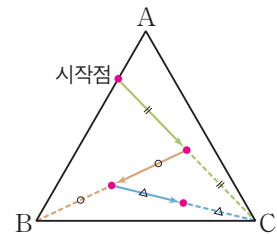
❶ 1 또는 2의 눈이 나올 때: 주어진 점과 A와의 중점
❷ 3 또는 4의 눈이 나올 때: 주어진 점과 B와의 중점
❸ 5 또는 6의 눈이 나올 때: 주어진 점과 C와의 중점

3단계_ 새로운 점에 대하여 2단계를 반복한다.

게임 예시

변 AB 위에 시작점을 찍고, 주사위를 던져 나온 눈의 수가 차례로 5, 4, 6일 때 다음과 같이 점을 찍는다.

다음 그림은 위의 시행을 각각 100번, 500번, 1500번 반복하였을 때의 예시 그림이다.

논술/수행평가 과제

교실 뒤에 커다란 종이를 붙여 놓고, 학급 전체의 공동 작업으로 위의 게임을 하여 보자.

2 통계와 그 활용

학습 목표

- 확률변수와 확률분포의 뜻을 알고, 기댓값과 분산을 구할 수 있다.
- 이항분포, 정규분포의 뜻을 이해하고, 실생활 문제에 이를 활용할 수 있다.
- 간단한 통계 조사의 결과를 해석할 수 있다.

하늘을 뒤덮을 만큼 많은 철새의 수를 어떻게 조사하면 될까? 저수지 곳곳에 둥지를 품은 새 중에서 올해에 부화한 수는 얼마나 될까?

이러한 궁금증을 해결할 때, 통계적 방법은 매우 유용한 도구가 된다.

특히 지식 · 정보화 사회에서 우리에게 쏟아지는 엄청난 양의 자료와 정보를 유용하게 활용하기 위해서는 적절한 통계적 방법을 구사할 수 있어야 한다.

통계와 그 활용에 들어가기 전에

1. 평균, 분산, 표준편차

n개의 자료 x_1, x_2, $\cdots$, x_n에 대하여

① 평균: $m=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

② 분산: $\sigma^2=\dfrac{1}{n}\{(x_1-m)^2+(x_2-m)^2+\cdots+(x_n-m)^2\}$

③ 표준편차: $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$

1 다음은 영주가 어느 날 전화한 5번의 통화 시간이다. 통화 시간의 평균과 표준편차를 구하여라.

(단위: 초)

83, 78, 93, 73, 88

2. Σ의 뜻

a_1, a_2, $\cdots$, a_n의 합을 Σ를 사용하여

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

로 나타낸다.

2 다음 식을 Σ를 사용하여 나타내어라.

(1) $x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots+x_np_n$

(2) $(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n$

3. Σ의 성질

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

② $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

③ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

④ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

3 $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2=A$, $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=m$이라고 할 때, $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2$을 A, m으로 나타내어라.

4. 확률의 뜻과 기본 성질

① 표본공간 S가 n개의 근원사건으로 이루어져 있고, 각 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대될 때, r개의 근원사건으로 이루어진 사건 A가 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{r}{n}$$

② $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$, $\mathrm{P}(S)=1$, $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

4 한 개의 동전을 3번 던질 때, 다음 확률을 구하여라.

(1) 앞면이 2번 나올 확률

(2) 앞면이 3번 나올 확률

1. 확률변수와 확률분포

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

확률분포의 뜻과 그 표현

① 표본공간의 각 원소에 하나의 실수값을 대응시켜 주는 것을 (1) ☐ 변수라고 한다.

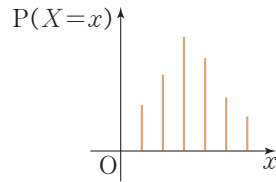
② 확률변수 X가 가질 수 있는 값이 x_1, x_2, $\cdots$, x_n이고 X가 이 값들을 가질 확률이

$$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

일 때, x_1, x_2, $\cdots$, x_n과 p_1, p_2, $\cdots$, p_n과의 대응 관계를 확률변수 X의 확률분포라고 한다.

③ 확률분포의 표

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n	1

④ 확률분포의 그래프

확률분포의 성질

① $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\geq 0$ (단, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)

② $\sum_{i=1}^{n} p_i=$ (2) ☐

③ $\mathrm{P}(x_i\leq X\leq x_j)=\sum_{k=i}^{j} p_k$ (단, i, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$이고, $i\leq j$)

확률변수 X의 평균, 분산 및 표준편차

확률변수 X가 가지는 값이 x_1, x_2, $\cdots$, x_n이고, 그 확률분포가
$\mathrm{P}(X=x_i)=p_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$일 때

① 평균: $\mathrm{E}(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}$ (3) ☐ $=m$

② 분산: $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}((X-$ (4) ☐ $)^2)$

$$=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

$$=x_1{}^2p_1+x_2{}^2p_2+\cdots+x_n{}^2p_n-\text{(5)}\ \square^2=\mathrm{E}(X^2)-m^2$$

③ 표준편차: $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}$

⋯› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 114~122쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 확률 (2) 1 (3) x_ip_i (4) m (5) m

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께하기 |

1. 다섯 장의 숫자 카드

1, 2, 3, 4, 5

가 각각 한 장씩 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 동시에 두 장의 카드를 뽑아 두 수의 차를 확률변수 X라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) X의 확률분포를 표로 나타내어라.

(2) X의 평균을 구하여라.

〔풀이〕

(1) 두 장의 카드를 뽑는 전체 경우의 수는

${}_5C_2=10$(가지)

확률변수 X가 가질 수 있는 값은

1, 2, 3, 4

이고, 이 값이 나오는 경우는 다음과 같다.

1의 경우: {1, 2}, {2, 3}, {3, 4}, {4, 5}

2의 경우: {1, 3}, {2, 4}, {3, 5}

3의 경우: {1, 4}, {2, 5}

4의 경우: {1, 5}

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

(2) $E(X)=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}=2$

| 스스로 하기 |

1. 네 장의 숫자 카드

1, 2, 3, 4

가 각각 한 장씩 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 동시에 두 장의 카드를 뽑아 두 수의 합을 확률변수 X라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) X의 확률분포를 표로 나타내어라.

(2) X의 평균을 구하여라.

〔풀이〕

(1) 두 장의 카드를 뽑는 전체 경우의 수는

${}_4C_2=\square$(가지)

확률변수 X가 가질 수 있는 값은

3, 4, 5, 6, 7

이고, 이 값이 나오는 경우는 다음과 같다.

3의 경우: {1, 2}, 4의 경우: {1, 3}

5의 경우: {1, 4}, {2, 3}

6의 경우: $\square$

7의 경우: {3, 4}

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	6	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\square$	$\frac{1}{6}$	1

(2) $E(X)=3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{2}{6}+6\times\square+7\times\frac{1}{6}=\square$

교과서 120쪽

1 확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같을 때, X의 평균과 분산을 각각 구하여라.

X	-1	0	1	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 오른쪽 표는 어느 경연 대회에서 입상자가 받는 상금을 나타낸 것이다. 참가자가 100명일 때, 참가자 한 사람이 받을 수 있는 상금에 대한 기댓값을 구하여라.

	인원(명)	상금(만 원)
1등	1	10
2등	2	5
3등	5	3
4등	10	2
5등	15	1

2 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, $P(2\le X\le 3)$의 값을 구하여라.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$2k$	$\frac{1}{4}$	k	$\frac{1}{4}$	1

3 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, 물음에 답하여라.

X	-1	0	1	합계
$P(X=x)$	a	$\frac{a}{2}$	a^2	1

(1) 상수 a의 값을 구하여라.

(2) 확률변수 X의 평균 $E(X)$와 분산 $V(X)$를 구하여라.

4 숫자 카드 [1]이 1장, [2]가 2장, [3]이 3장 들어 있는 주머니에서 임의로 한 장을 꺼낼 때, 카드에 적힌 수를 확률변수 X라고 하자.

(1) X의 확률분포를 표로 나타내어라.

(2) X의 평균, 분산, 표준편차를 각각 구하여라.

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

5 확률변수 X에 대하여 $E(X)=5$, $V(X)=3$일 때, $E(X^2)$의 값을 구하여라.

실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 노란 공 2개와 파란 공 4개가 들어 있는 상자에서 동시에 2개를 꺼낼 때, 나오는 노란 공의 수를 확률변수 X라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내어라.

(2) X의 기댓값을 구하여라.

2 확률변수 X가 가지는 값이 1, 2, 3, ⋯, 9, 10이고, 그 확률분포가 $\mathrm{P}(X=x)=kx$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 상수 k의 값을 구하여라.

(2) X의 평균을 구하여라.

$X=1$, 2, 3일 때 X의 확률분포의 표를 만들어 본다.

3 빨간 장미 3송이와 노란 장미 2송이가 들어 있는 통에서 동시에 3송이를 꺼낼 때, 그중 빨간 장미의 수를 확률변수 X라고 하자. 이때, X의 평균과 분산을 각각 구하여라.

4 원점 O를 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P는 동전을 던져 앞면이 나오면 $+1$만큼, 뒷면이 나오면 -1만큼 이동한다. 동전을 두 번 던질 때, 점 P의 좌표 x를 확률변수 X라고 하자. 이때, $\mathrm{P}(X\leq 0)$의 값을 구하여라.

5 1부터 6까지의 숫자가 각각 적혀 있는 6장의 카드에서 동시에 3장을 뽑을 때, 뽑힌 카드에 적힌 수 중 가장 작은 수를 확률변수 X라고 하자. 이때, $\mathrm{P}(X\leq 2)$의 값을 구하여라.

확률변수 $aX+b$의 평균, 분산 및 표준편차

1. 확률변수 X의 확률분포가 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$이고 평균과 분산을 각각 $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$라고 할 때, $aX+b$의 평균, 분산, 표준편차를 생각하여 보자.

① $\mathrm{E}(aX+b)=(ax_1+b)p_1+(ax_2+b)p_2+\cdots+(ax_n+b)p_n$
$=a(x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n)+b(p_1+p_2+\cdots+p_n)$
$=a\mathrm{E}(X)+b$

② $\mathrm{V}(aX+b)=\mathrm{E}((aX+b)^2)-\{\mathrm{E}(aX+b)\}^2$
$=\mathrm{E}(a^2X^2+2abX+b^2)-\{a\mathrm{E}(X)+b\}^2$
$=a^2\mathrm{E}(X^2)+2ab\mathrm{E}(X)+b^2-a^2\{\mathrm{E}(X)\}^2-2ab\mathrm{E}(X)-b^2$
$=a^2[\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2]$
$=a^2\mathrm{V}(X)$

③ $\sigma(aX+b)=\sqrt{\mathrm{V}(aX+b)}=\sqrt{a^2\mathrm{V}(X)}=|a|\sigma(X)$

2. 확률변수 X의 기댓값이 m, 표준편차가 σ일 때

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}$$

이라고 하면 Z의 평균, 분산, 표준편차는 다음과 같다.

① $\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}\mathrm{E}(X-m)=\frac{1}{\sigma}(m-m)=0$

② $\mathrm{V}(Z)=\mathrm{V}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{V}(X)=\frac{1}{\sigma^2}\cdot\sigma^2=1$

③ $\sigma(Z)=\sqrt{1}=1$

| **참고** | (1) 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$을 확률변수 X의 표준화 변수라고 한다.

(2) 어떤 시험 점수 X의 평균이 m, 표준편차가 σ일 때

$$T=10\times\frac{X-m}{\sigma}+50$$

을 T 점수라고 한다. T 점수의 평균은 50점이고, 표준편차는 10점이다.

대규모 시험에서 표준 점수

우리나라의 대학 수학 능력 시험이나 미국의 SAT 등과 같이 수험생이 많고, 과목 수도 여러 가지인 경우에는 항상 과목별 난이도의 차이로 인한 문제가 생긴다.

예를 들어 어떤 학생의 국어 점수가 80점, 수학 점수가 75점일 때, 80과 75의 단순 비교만으로는 국어를 잘했는지 수학을 잘했는지 알 수가 없다.

특히 선택 과목인 경우 선택에 따른 유리함 또는 불리함을 없애고, 각 과목 사이의 난이도 조정을 위해서는 표준 점수의 도입이 필수적이다. 표준 점수는 전체 응시자의 과목별 평균 점수와 표준편차를 이용하여 각 학생의 과목별 점수가 과목별 전체 평균 점수보다 얼마나 높고 낮은가를 비교하는 것이다.

표준 점수 중에서 많이 사용하는 것이 T 점수이다. T 점수는 전체 평균 점수가 50점, 표준편차가 10점이 되도록 한 것이다.

예를 들어 각 학생의 수학에 대한 T 점수는 다음과 같이 계산한다.

$$50+10\times\frac{(\text{각 학생의 수학 원점수})-(\text{수학 점수의 평균})}{(\text{수학 점수의 표준편차})}$$

이 점수는 과목에 상관없이 약 99.7 %의 학생들의 점수가 15점 ~85점 사이에 있게 된다.

| 보기 | 전국 규모의 성취도 평가에서 두 학생 A, B의 과목별 점수가 다음과 같다고 하자.

	국어	영어	수학	과학	사회	계
평균	70	60	50	75	80	
표준편차	8	6	10	7	5	
A 학생	86	75	52	82	90	385
B 학생	78	72	61	89	85	385

여기서 두 학생 A, B의 총점은 385점으로 같음을 알 수 있다.

그러나 다음과 같이 T 점수로 바꾸면 A 학생의 점수가 6점 더 높음을 알 수 있다.

	국어	영어	수학	과학	사회	T 점수 합계
A 학생 T 점수	70	75	52	60	70	327
B 학생 T 점수	60	70	61	70	60	321

2. 이항분포

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

● 이항분포의 뜻

1회의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p이고, 이러한 시행을 독립적으로 n회 할 때, 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X는 0, 1, 2, $\cdots$, n의 값을 가지는 확률변수이고, 그 확률분포는 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{\boxed{(1)}} \quad (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이와 같은 확률분포를 이항분포라 하고, 기호로 $\mathrm{B}(n,\ \boxed{(2)})$와 같이 나타낸다.

● 컴퓨터 프로그램을 이용하여 이항분포의 확률값 구하기

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(50,\ 0.4)$를 따를 때, $\mathrm{P}(X=30)$과 $\mathrm{P}(X\le40)$은 각각 다음과 같이 구한다.

❶ Excel의 수식 도구 상자에서 함수 삽입 아이콘을 클릭하면 함수 마법사 대화 상자가 나타난다.

❷ 함수 마법사 대화 상자의 범주 선택에서 '통계', 함수 선택에서 'BINOMDIST'를 선택한 후 확인을 클릭하면 함수 인수 대화 상자가 나타난다.

❸ (i) $\mathrm{P}(X=30)$의 값 구하기

함수 인수 대화 상자에서 Number_s에 '30', Trials에 '50', Probability_s에 '0.4'를 입력하고, Cumulative에 'FALSE'를 입력하여 구한다.

❹ (ii) $\mathrm{P}(X\le40)$의 값 구하기

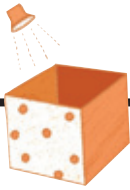
함수 인수 대화 상자에서 Number_s에 '40', Trials에 '50', Probability_s에 '0.4'를 입력하고, Cumulative에 'TRUE'를 입력하여 구한다.

● 이항분포의 평균, 분산 및 표준편차

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르면

$$\mathrm{E}(X)=\boxed{(3)},\quad \mathrm{V}(X)=\boxed{(4)},\quad \sigma(X)=\sqrt{npq}\quad (\text{단, } q=1-p)$$

⋯▸ 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 123~128쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) $n-x$ (2) p (3) np (4) npq (또는 $np(1-p)$)

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 한 개의 동전을 10번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 이때, X의 확률분포의 식을 구하여라.

[풀이]
한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.
확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, …, 10이고, X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다. 따라서 X의 확률분포의 식은

$$\mathrm{P}(X=x)$$
$$={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}$$
$$={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\ (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

2. 한 개의 동전을 n번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. X의 평균이 36일 때, n의 값을 구하여라.

[풀이]
한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다. 이때, $\mathrm{E}(X)=np$이므로

$$\frac{1}{2}n=36 \qquad \therefore n=72$$

| 스스로 하기 |

1. 한 개의 주사위를 10번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 이때, X의 확률분포의 식을 구하여라.

[풀이]
한 개의 주사위를 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\square$이다.
확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, …, 10이고, X는 이항분포 $\mathrm{B}(10,\ \square)$을 따른다.
따라서 구하는 X의 확률분포의 식은

$$\mathrm{P}(X=x)$$
$$=\square\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x}$$
$$(\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

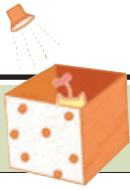
2. 한 개의 주사위를 n번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. X의 평균이 20일 때, n의 값을 구하여라.

[풀이]
한 개의 주사위를 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다. 이때, $\mathrm{E}(X)=np$이므로

$$\square\, n=20 \qquad \therefore n=\square$$

교과서 127쪽

1 발아율이 20 %인 씨앗 100개를 뿌렸을 때, 발아하는 씨앗의 개수를 확률변수 X라고 하자. 물음에 답하여라.

(1) X가 가질 수 있는 값을 말하여라.
(2) X의 확률분포의 식을 구하여라.
(3) X의 평균, 분산, 표준편차를 각각 구하여라.

기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 어떤 회사에서 생산되는 제품 전체의 10 %에 경품 교환권을 부착하였다고 한다. 이 회사에서 생산된 제품 5개를 구입하였을 때, 경품 교환권이 붙은 제품의 개수를 확률변수 X라고 하자. 이때, X의 확률분포의 식을 구하여라.

2 흰 공 40개, 검은 공 60개가 들어 있는 주머니에서 한 개를 꺼내 보고 다시 넣는 일을 10번 되풀이할 때, 나오는 흰 공의 개수를 확률변수 X라고 하자. 이때, X의 평균과 표준편차를 구하여라.

3 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X의 평균이 12, 표준편차가 3일 때, n과 p의 값을 각각 구하여라.

4 병뚜껑을 500번 던졌을 때, 윗면이 300번 나왔다. 이 병뚜껑을 5번 던져서 4번 이상 윗면이 나오면 이기는 시합을 할 때, 이길 확률을 구하여라.

5 어느 과수원에서 생산되는 과일의 20 %가 특상품이다. 이 과수원에서 생산된 과일 더미에서 20개를 임의로 꺼낼 때, 나오는 특상품의 개수를 확률변수 X라고 하자. 이때, X^2의 평균을 구하여라.

실 력 키 우 기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 흰 공 3개와 빨간 공 2개가 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼낸 후 다시 넣는 일을 10번 반복할 때, 같은 색의 공이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 이때, X의 확률분포의 식을 구하여라.

상금의 기댓값은 $\sum_{x=0}^{10} 25^x \mathrm{P}(X=x)$ 으로 계산하지!

2 한 개의 주사위를 10번 던져서 1의 눈이 나온 횟수를 확률변수 X라고 하자. $X=x$이면 상금 25^x원을 받는다고 할 때, 상금의 기댓값을 구하여라.

3 확률변수 X의 확률분포가 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{18}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x} \quad (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 18)$$

(1) X의 평균과 분산을 구하여라.

(2) $\sum_{x=0}^{18} x^2 \cdot {}_{18}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}$의 값을 구하여라.

$\mathrm{E}(ax+b)=a\mathrm{E}(x)+b$

4 한 개의 주사위를 8번 던질 때, 소수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 이때, 확률변수 $(X-a)^2$의 평균의 최솟값을 구하여라.

(단, a는 상수)

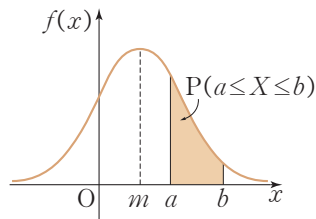
5 어느 항공 노선에서 예약한 사람이 실제로 탑승하지 않을 확률이 10 %라고 한다. 이 노선의 한 항공기의 좌석 수가 200석일 때, 210명이 예약하였다. 이때, 남은 좌석 수의 평균을 구하여라.

3. 정규분포

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

정규분포의 뜻

① 확률변수 X의 분포를 나타내는 그래프가 평균이 m, 분산이 σ^2인 정규분포곡선일 때, X는 평균이 m, 분산이 σ^2인 정규분포를 따른다고 하고, 기호로 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$과 같이 나타낸다.

② 확률변수 X의 값이 구간 $[a, b]$에 있을 확률 $\mathrm{P}(a \le X \le b)$는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 (1) ☐이다.

정규분포곡선의 성질

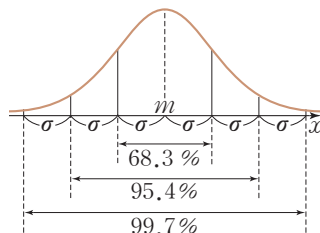
① m을 중심으로 좌우 대칭인 종 모양의 곡선이다.

② 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

③ 곡선과 x축, 그리고

(i) 구간 $(m-\sigma, m+\sigma)$ 사이의 넓이는 전체의 (2) ☐ %이다.

(ii) 구간 $(m-2\sigma, m+2\sigma)$ 사이의 넓이는 전체의 (3) ☐ %이다.

(iii) 구간 $(m-3\sigma, m+3\sigma)$ 사이의 넓이는 전체의 (4) ☐ %이다.

표준정규분포

평균이 0, 표준편차가 1인 정규분포를 표준정규분포라 하고, 기호로 (5) ☐ 과 같이 나타낸다.

정규분포의 표준화

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 Z를

$$Z = \frac{X-m}{\sigma}$$

이라고 하면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

··· 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 129~134쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 넓이 (2) 68.3 (3) 95.4 (4) 99.7 (5) $\mathrm{N}(0, 1)$

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

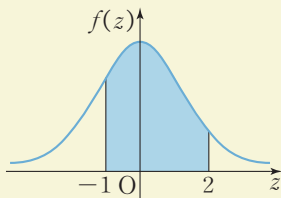
1. 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 $\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$의 값을 구하여라.

〔풀이〕

$\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.3413+0.4772=0.8185$

2. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 5^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(55\le X\le 65)$를 구하여라.

〔풀이〕

$\mathrm{P}(55\le X\le 65)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{55-60}{5}\le\frac{X-60}{5}\le\frac{65-60}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1)$

$=2\times 0.3413=0.6826$

| 스스로 하기 |

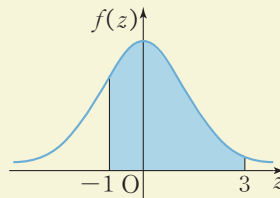
1. 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 $\mathrm{P}(-1\le Z\le 3)$의 값을 구하여라.

〔풀이〕

$\mathrm{P}(-1\le Z\le 3)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$

$=0.3413+$ ☐ $=$ ☐

2. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 3^2)$을 따를 때, $\mathrm{P}(14\le X\le 26)$을 구하여라.

〔풀이〕

$\mathrm{P}(14\le X\le 26)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{14-20}{3}\le\frac{X-20}{3}\le\frac{26-20}{3}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)$

$=2\times$ ☐ $=$ ☐

교과서 131쪽

1 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(1\le Z\le 3)$ (2) $\mathrm{P}(Z\le 1.96)$

교과서 131쪽

2 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음을 만족하는 c의 값을 구하여라.

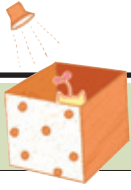
(1) $\mathrm{P}(Z\le c)=0.9495$ (2) $\mathrm{P}(Z\ge c)=0.1003$

기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 5^2)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 다음 확률을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(X\leq 66)$　　(2) $\mathrm{P}(63\leq X\leq 69)$

(3) $\mathrm{P}(X\geq 69)$　　(4) $\mathrm{P}(54\leq X\leq 63)$

2 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 표준정규분포표를 이용하여 $\mathrm{P}(|X-m|\leq 2\sigma)$의 값을 구하여라.

제품의 무게를 확률변수 X라고 할 때, 불량품은 $X\leq 29$ 또는 $X\geq 31$인 경우이다.

3 어느 공장에서 생산되는 제품의 무게는 평균이 30 g, 표준편차가 0.5 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서는 무게가 29 g 이하 또는 31 g 이상인 제품을 불량품으로 판정하여 폐기 처분한다. 이 공장에서 하루에 10000개의 제품을 생산할 때, 그중 폐기 처분되는 제품의 개수를 구하여라.

4 혈압은 최고 혈압과 최저 혈압으로 나타내는데 최고 혈압이 160 mmHg 이상, 최저 혈압이 100 mmHg 이상이면 고혈압이라고 한다. 어느 지역의 40대 주민의 혈압을 측정한 결과, 최고 혈압은 평균이 130 mmHg, 표준편차가 15 mmHg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역의 40대 주민 중 최고 혈압이 고혈압의 범위에 속하는 사람은 몇 %인지 구하여라.

5 어떤 자격 시험의 점수는 평균이 60점, 표준편차가 10점인 정규분포를 따른다고 한다. 상위 6.3 % 이내에 드는 응시자에게 평점 A를 준다고 할 때, 응시자가 평점 A를 받기 위해서는 적어도 몇 점을 받아야 하는지 구하여라.

실력 키우기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{P}(X\le 12)=\mathrm{P}(X\ge 26)$$

일 때, m의 값을 구하여라.

2 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(18,\ 2^2)$을 따를 때,

$$\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413,\ \mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$$

를 이용하여 $\mathrm{P}(a\le X\le b)=0.8185$를 만족하는 정수 a, b의 값을 각각 구하여라. (단, $a>15$)

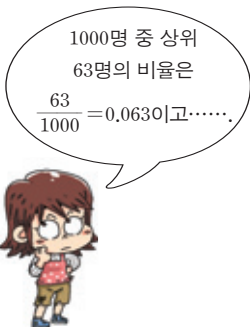
3 어느 고등학교 학생 750명을 대상으로 등교 시간을 조사하였더니 평균이 20분, 표준편차가 4분인 정규분포를 따른다고 한다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 등교 시간이 12분 이상 16분 이하인 학생은 전체의 몇 %인지 구하여라.

(2) 등교 시간이 28분 이상인 학생의 수를 추측하여라.

4 어느 회사에서 238명의 신입 사원을 선발하기 위하여 입사 시험을 실시하였다. 응시자 2000명의 성적은 평균이 800점, 표준편차가 50점인 정규분포를 따른다고 할 때, 합격자의 최저 점수를 구하여라.

1000명 중 상위 63명의 비율은 $\frac{63}{1000}=0.063$이고…….

5 어느 학교 학생 1000명의 수학 성적이 평균이 70점, 표준편차가 10점인 정규분포를 따른다고 할 때, 상위 63등 이내에 들기 위해서는 몇 점 이상을 받아야 하는지 구하여라.

4. 통계 조사와 그 활용

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

모집단과 표본

① 관심의 대상이 되는 집단 전체를 모집단이라 하고, 모집단 전체를 조사하는 것을 (1) ☐ 조사라고 한다.

② 모집단의 일부를 추출한 부분집합을 표본이라 하고, 표본을 조사하는 것을 (2) ☐ 조사라고 한다.

표본평균 $\overline{X}$의 분포

모평균이 m이고, 모표준편차가 σ인 모집단에서 크기 n인 표본을 복원추출할 때

① 모집단이 정규분포를 따르면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{\boxed{(3)}}\right)$을 따른다.

② 모집단이 정규분포를 따르지 않더라도 표본의 크기 n이 충분히 크면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$에 가까워진다.

표본비율의 분포

표본비율 $\hat{p}$은 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 정규분포 $\mathrm{N}\left(p, \dfrac{pq}{n}\right)$에 가까워지고

$Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$에 가까워진다.

신뢰도와 구간추정

① 모평균 m의 구간추정

(i) 신뢰도 95 %로 구간추정: $\bar{x}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x}+\boxed{(4)}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(ii) 신뢰도 99 %로 구간추정: $\bar{x}-2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x}+2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

② 모비율 p의 구간추정

(i) 신뢰도 95 %로 구간추정: $\hat{p}-1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p}+1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

(ii) 신뢰도 99 %로 구간추정: $\hat{p}-2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p}+\boxed{(5)}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

⋯ 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 135~150쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 전수 (2) 표본 (3) n (4) 1.96 (5) 2.58

바탕 다지기

*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께하기 |

1. 우리나라 고등학교 학생들의 통계 처리 능력을 알아보기 위하여 전국에서 1000명의 학생을 임의추출하여 그 능력을 조사하였다. 다음을 말하여라.

(1) 모집단 (2) 표본

(3) 표본의 크기

[풀이]

(1) 우리나라 고등학교 학생 전체가 모집단이다.

(2) 임의추출된 1000명의 고등학생이 표본이다.

(3) 1000

2. 어떤 과수원에서 생산하는 사과의 무게는 표준편차가 10 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 생산한 사과 중 100개를 임의추출하여 무게를 조사하였더니 평균이 118 g이었다. 이 과수원에서 생산하는 사과 전체의 평균 무게 m을 다음의 신뢰도로 구간추정하여라.

(1) 신뢰도 95 %

(2) 신뢰도 99 %

[풀이]

표본평균 $\bar{x}=118$, 모표준편차 $\sigma=10$, 표본의 크기 $n=100$이다.

(1) 신뢰도 95 %인 경우

$$118-1.96\frac{10}{\sqrt{100}} \le m \le 118+1.96\frac{10}{\sqrt{100}}$$

$\therefore 116.04 \le m \le 119.96$

(2) 신뢰도 99 %인 경우

$$118-2.58\frac{10}{\sqrt{100}} \le m \le 118+2.58\frac{10}{\sqrt{100}}$$

$\therefore 115.42 \le m \le 120.58$

| 스스로 하기 |

1. 우리나라 농어촌 지역 고등학교의 정보화 환경을 알아보기 위하여 농어촌 지역에서 100개 학교를 임의추출하여 정보화 환경을 조사하였다. 다음을 말하여라.

(1) 모집단 (2) 표본

(3) 표본의 크기

[풀이]

(1) 우리나라 ☐ 지역 고등학교 전체가 모집단이다.

(2) 임의추출된 농어촌 지역 100개 고등학교가 ☐ 이다.

(3) ☐

2. 어떤 과수원에서 생산하는 배의 무게는 표준편차가 25 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 과수원에서 생산한 배 중 100개를 임의추출하여 무게를 조사하였더니 평균이 235 g이었다. 이 과수원에서 생산하는 배 전체의 평균 무게 m을 다음의 신뢰도로 구간추정하여라.

(1) 신뢰도 95 %

(2) 신뢰도 99 %

[풀이]

표본평균 $\bar{x}=235$, 모표준편차 $\sigma=25$, 표본의 크기 $n=100$이다.

(1) 신뢰도 95 %인 경우

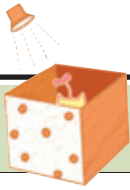
$$235-1.96\frac{25}{\sqrt{100}} \le m \le 235+1.96\frac{25}{\sqrt{100}}$$

$235-4.9 \le m \le 235+$ ☐

$\therefore 230.1 \le m \le$ ☐

(2) 신뢰도 99 %인 경우

$$235-2.58\frac{25}{\sqrt{100}} \le m \le 235+2.58\frac{25}{\sqrt{100}}$$

$\therefore 228.55 \le m \le$ ☐

기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 어떤 공장에서 생산되는 전구의 수명 X의 분포는 평균이 2000시간, 표준편차가 200시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산된 전구 중 임의추출한 100개의 평균 수명을 $\overline{X}$라고 할 때, $\overline{X}$가 2000시간 이상 2040시간 이하일 확률을 구하여라.

2 어느 고등학교 2학년 학생들의 키의 분포는 평균이 175 cm, 표준편차가 10 cm인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학생들 중 임의추출한 25명의 키의 평균 $\overline{X}$가 177 cm 이상 179 cm 이하일 확률을 구하여라.

3 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라고 할 때, 모평균 m을 신뢰도 a %로 구간추정하면

$$\overline{x}-\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$$

이다. 다음 중 옳은 것을 모두 찾아라.

ㄱ. 신뢰도를 높이면 신뢰구간의 길이가 길어진다.
ㄴ. 표본평균의 값 $\overline{x}$가 커지면 신뢰구간의 길이가 길어진다.
ㄷ. 표본의 크기를 크게 하면 신뢰구간의 길이가 짧아진다.

4 어떤 회사에서 생산된 색연필로 그을 수 있는 선의 길이는 표준편차가 100 m인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사 제품 중 100개를 임의추출하여 선을 그려 보았더니 선의 길이의 평균이 1000 m이었다. 다음의 신뢰도로 그을 수 있는 선의 길이의 평균을 구간추정하여라.

(1) 신뢰도 95 %　　　　(2) 신뢰도 99 %

$\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

5 어느 정책 A에 대한 지지도를 알아보기 위하여 주민 400명을 임의추출하여 조사하였더니 찬성이 64 %로 나타났다. 전체 주민의 찬성율을 신뢰도 95 %로 구간추정하여라.

표본평균의 분포

오른쪽 표와 같은 분포를 가지는 모집단을 생각하면 평균 $m=5$이고 분산 $\sigma^2=5$이다.

X	2	4	6	8	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

여기에서 크기 $n=2$인 표본 X_1, X_2를 택하고, 그 표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$의 분포를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

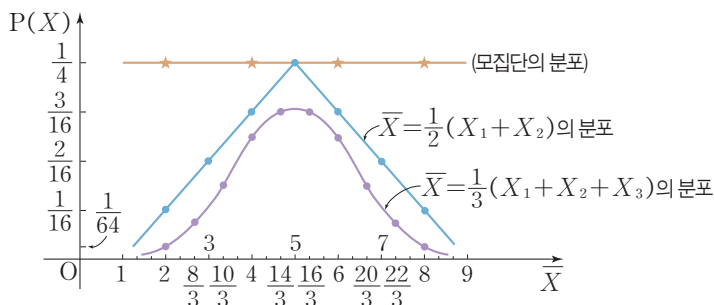
$\overline{X}$	2	3	4	5	6	7	8	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})=5=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{2}=\frac{\sigma^2}{n}$$

같은 방법으로 크기 $n=3$인 표본 X_1, X_2, X_3을 택하고 그 표본평균 $\overline{X}=\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$의 분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\overline{X}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{12}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{18}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{22}{3}$	$\frac{24}{3}$	합계
$\mathrm{P}(\overline{X}=\overline{x})$	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{10}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{10}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$	1

$$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})=5=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{3}=\frac{\sigma^2}{n}$$

위의 모집단의 분포와 크기 $n=2$ 및 $n=3$인 표본평균의 분포를 그래프로 나타내면 다음과 같다. 이때, $n=3$인 경우에도 $\overline{X}$의 분포는 정규분포에 가까워짐을 알 수 있다.

실 력 키 우 기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

표본평균 $\overline{X}$의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$이다.

1 어느 도시의 가구당 소득은 평균이 월 330만 원이고, 표준편차가 20만 원인 정규분포를 따른다고 한다. 이 도시에서 100가구를 임의추출하였을 때, 이 100가구의 평균 소득과 이 도시 전체의 평균 소득의 차가 5만 원 이상이 될 확률을 구하여라.

2 어느 회사에서 생산되는 치약의 무게는 표준편차가 10 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 치약 중 n개의 표본을 임의추출하여 무게를 조사하였더니 평균이 80 g이라고 한다. 신뢰도 95 %로 구간추정한 모평균 m의 신뢰구간이 $78.04 \le m \le 81.96$일 때, 표본의 크기 n의 값을 구하여라.

3 어느 도시의 고등학교 남학생들의 몸무게의 분포는 표준편차가 5 kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 도시의 고등학교 남학생들의 몸무게의 평균을 신뢰도 95 %로 구간추정할 때, 신뢰구간의 길이를 1 kg 이하로 하기 위한 표본의 크기의 최솟값을 구하여라.

4 어느 지역 보건소에서 주민들의 건강 상태를 조사하기 위하여 400명을 임의추출하여 조사한 결과 40명이 과체중이라고 한다. 이 지역 전체 주민의 과체중율을 신뢰도 95 %로 구간추정하여라.

신뢰도 95 %인 모비율 p의 신뢰구간의 길이는
$2 \times 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$
$\le 2 \times 1.96\sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{n}}$

5 어떤 정책에 대한 찬성율을 신뢰도 95 %로 구간추정하려고 한다. 신뢰구간의 길이를 8 % 이내로 하기 위한 표본의 크기의 최솟값을 구하여라.

읽기 자료

표본의 크기보다 더 중요한 추출 방법

루스벨트(Roosevelt, F. D.)

1936년 11월 미국의 대통령 선거에서 미국의 몇몇 언론은 엄청난 오보를 내보냈다. 실제 당선자인 루스벨트를 제쳐두고 랜든이 당선되었다고 대서특필하였던 것이다.

이러한 오보의 이유는 그 당시 오랜 역사와 최고의 발행 부수를 자랑하던 다이제스트(Literary Digest)라는 잡지사가 약 240만 명을 대상으로 엽서 조사를 한 결과를 믿고 그대로 발표하였기 때문이다. 다이제스트는 공화당의 랜든 후보가 57 %, 민주당의 루스벨트 후보가 43 %의 득표율을 얻을 것이라고 예측하였다. 그러나 실제로는 랜든 후보가 37.5 %, 루스벨트 후보가 62.5 %의 득표율로 루스벨트가 승리하였다. 여론 조사 사상 예측의 결과가 19 % 이상이나 틀린 것은 있을 수 없는 실수였다. 이와 같은 오류의 원인은 표본추출 방법이 잘못되었기 때문이었다. 다이제스트 잡지사는 투표자의 표본을 전화번호부와 자동차 소유자 명부로부터 추출하였는데, 1936년 당시만 하여도 자동차와 전화를 소유한 사람은 주로 중산층 이상이었고, 이들은 주로 공화당의 랜든 후보를 지지하는 사람들이었다. 반면에 갤럽이 주도한 여론 조사에서는 비례 할당이라는 새로운 임의추출 방법을 적용하여 각 소득 계층별로 소수의 표본만으로 실제 결과와 거의 비슷한 예측값을 제시하였다.

표본의 크기가 200만을 넘는 것은 엄청난 일이다. 표본조사 비용으로 1인당 1000원 씩만 계산하여도 20억 원 이상이 필요하기 때문이다. 이와 같이 막대한 경비와 시간을 사용하고도 사상 최악의 오류가 발생한 것은 추출된 표본이 모집단을 대표하지 못하였기 때문이다.

오늘날에는 단지 1600명만 조사하여도 신뢰도 95 %에서 최대 오차를 2.5 % 이내로 할 수 있다.

따라서 표본조사에서는 표본의 크기도 중요하지만 그보다는 모집단을 대표할 수 있는 표본의 추출 방법이 더욱 중요함을 알 수 있다.

랜든(Landon, A.)

IV 대단원 확인하기

계산

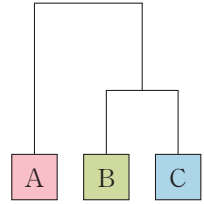
1 ★★

두 명의 축구 선수가 한 번의 페널티 킥으로 공을 넣을 확률이 각각 0.9, 0.8이다. 이때, 두 명 중 적어도 한 명이 페널티 킥으로 공을 넣을 확률을 구하여라.

계산

2 ★★

어떤 시합에서 A가 B를 이길 확률은 $\frac{1}{2}$, B가 C를 이길 확률은 $\frac{3}{4}$, C가 A를 이길 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 오른쪽 그림의 대진표와 같이 A, B, C 세 사람이 토너먼트 방식으로 시합을 할 때, A가 우승할 확률을 구하여라. (단, 비기는 경우는 없다고 한다.)

이해

3 ★

다음 표는 어느 톨게이트를 지나는 승용차에 탑승한 사람의 수를 조사하여 나타낸 것이다. 물음에 답하여라.

사람 수	1	2	3	4	5	합계
확률	0.35	0.3	0.2	0.1	a	1

(1) a의 값을 구하여라.

(2) 승용차 1대당 탑승한 사람 수의 평균을 구하여라.

이해

4 ★★

남자 4명, 여자 4명 중 제비로 3명의 대표를 뽑으려고 한다. 대표로 뽑히는 남자의 수를 확률변수 X라고 할 때, 물음에 답하여라.

(1) 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내어라.

(2) 확률변수 X의 평균과 분산을 구하여라.

추론

5 ★★

어느 공연에 예약한 사람이 사전 통보 없이 오지 않을 확률이 5 %라고 한다. 공연장의 좌석 수가 60석일 때, 62명이 예약한 경우 좌석이 부족하게 될 확률을 구하여라. (단, $0.95^{61}=0.0438$, $0.95^{62}=0.0416$)

의사소통

6
★★

어느 버스 정류장에 도착하는 버스 중 10 %가 연착한다고 한다. 어느 날 이 정류장에 버스 20대가 도착할 때, 연착하는 버스가 3대 이하일 확률을 이항분포표를 이용하여 구하여라.

추론

7
★★

어떤 회사의 통신망을 이용하는 사람 1000명을 대상으로 접속 시간을 조사하였더니 평균이 40분, 표준편차가 5분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 이용자 중 접속 시간이 50분을 넘는 사람의 수는 약 몇 명인가?

문제 해결

8
★★

모집 인원이 10명인 어느 교향악단의 오디션에 100명이 지원하였다. 시험 결과 지원자의 성적은 평균이 50점, 표준편차가 10점이었다. 지원자 전체의 성적이 정규분포를 따를 때, 합격자의 최저 점수를 구하여라. (단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.28) = 0.4$)

문제 해결

9
★★★

어느 제과점에서 만드는 샌드위치의 무게는 표준편차가 0.5 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 제과점에서 만든 샌드위치 중 25개를 임의추출하여 무게를 재었더니 평균이 32.2 g이었다. 다음 물음에 답하여라.

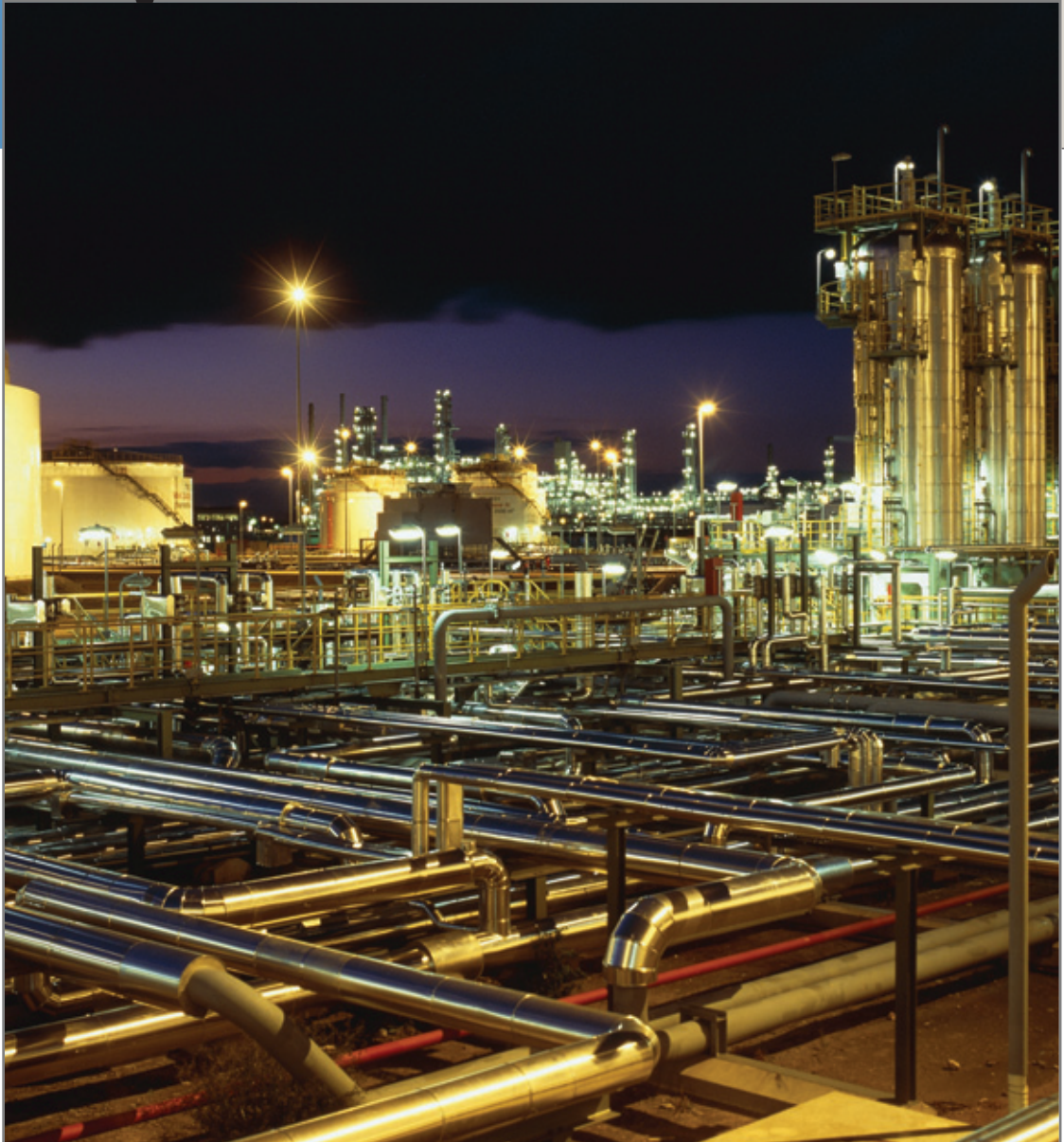
(1) 이 제과점에서 만드는 샌드위치의 무게의 평균을 신뢰도 95 %로 구간추정하여라.

(2) 신뢰도 95 %인 신뢰구간의 길이를 0.2 g 이내로 하기 위한 표본의 크기의 최솟값을 구하여라.

의사소통

10
★★

어느 선거에서 출마한 A에 대한 지지도를 알아보기 위하여 유권자 100명을 임의추출하여 조사하였더니 찬성이 20 %로 나타났다. 전체 유권자의 찬성율을 신뢰도 95 %로 구간추정하여라.

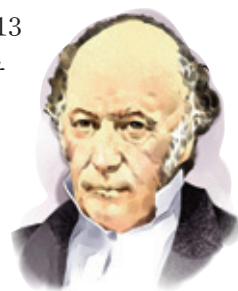
V 도형과 그래프

정보 통신망이나 전기, 수도의 공급망 등을 효율적으로 설치하고 관리하려면 각 지점을 파악하고 지점들 사이의 관계를 파악해야 한다.
각 지점을 점으로 하여 지점 사이의 관계를 선으로 나타내면 복잡한 통신망과 공급망을 수학적 모형으로 간단히 표현할 수 있으며, 이를 활용하여 최적의 의사 결정을 할 수 있다.

그래프 이론의 발전에 기여한 해밀턴

_Hamilton, W. R. ; 1805~1865

영국의 수학자 해밀턴은 어학에 뛰어난 재능을 가져 13세 때 외국어에 통달하였고, 시 쓰기에 열중하여 영국의 위대한 시인인 워즈워드(Wordsworth, W. ; 1770～1850)와도 절친한 친구였다.

해밀턴은 15세 무렵부터 수학에 관심을 가지기 시작했으며 21세에는 천문학 교수로 임명되었다. 한편 19세기 초까지는 교환법칙이 성립하지 않는 대수는 아무도 생각하지 못하였으나 해밀턴은 1843년 최초의 비가환대수인 사원수 대수를 탄생시켰다. 오늘날 우리가 배우는 행렬도 곱셈 연산에 대하여 교환법칙이 성립하지 않는다.

해밀턴은 사원수에 관한 논문 외에도 다수의 논문을 발표하였으며, 특히 행렬 이론에서 케일리－해밀턴 정리, 해밀턴 게임, 해밀턴 폐쇄로 등 그래프 이론과 관련이 있는 연구에도 탁월한 업적을 남겼다.

1 도형과 그래프

학습 목표

- 연결 상태가 같은 도형의 성질을 이해하고, 공통적인 특징을 설명할 수 있다.
- 정다면체를 평면그래프로 나타낼 수 있다.
- 그래프를 이용하여 여러 가지 최적화 문제를 해결할 수 있다.

1. 도형과 그래프

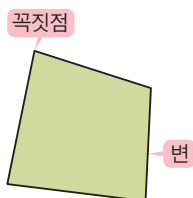
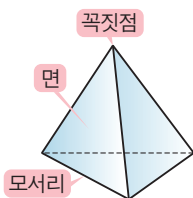
여러 장소를 방문할 때 방문 장소를 점으로, 이동 경로를 선으로 나타낼 수 있으며, 이러한 그림을 이용하여 이동 거리나 시간을 최적으로 하는 방문 순서를 찾을 수 있다.

또 건물에서의 비상 대피도, 학급의 비상 연락망 등도 점과 선으로 나타낼 수 있으며 대피 이동 거리나 시간을 최적으로 하는 경로를 찾을 수 있다.

도형과 그래프에 들어가기 전에

1. 다각형과 다면체의 뜻

① 다각형: 세 개 이상의 선분으로 둘러싸인 평면도형을 다각형이라 하고, 선분이 n개인 다각형을 n각형이라고 한다.

② 다면체: 다각형인 면으로만 둘러싸인 입체도형을 다면체라 하고, 면이 n개인 다면체를 n면체라고 한다.

사각형

사면체

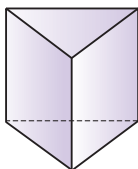
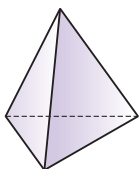
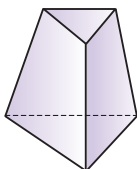
2. 다각형의 대각선의 개수

n각형의 대각선의 개수는 $\dfrac{n(n-3)}{2}$개이다.

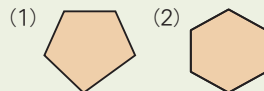
3. 각기둥, 각뿔, 각뿔대의 뜻

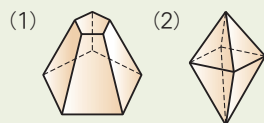
① 각기둥: 두 밑면이 서로 평행하고 합동인 다각형이며 옆면이 모두 직사각형인 다면체

② 각뿔: 밑면이 다각형이고 옆면이 모두 삼각형인 다면체

③ 각뿔대: 각뿔을 밑면에 평행한 평면으로 잘라서 생기는 두 다면체 중에서 각뿔이 아닌 쪽의 다면체

삼각기둥

삼각뿔

삼각뿔대

1 다음 도형의 이름을 말하여라.

(1) (2)

2 다음 입체도형은 몇 면체인지 말하여라.

(1) (2)

3 다음 다각형의 대각선의 개수를 구하여라.

(1) 사각형 (2) 육각형

(3) 팔각형 (4) 십이각형

4 다음 각 입체도형의 꼭짓점, 면, 모서리의 개수를 말하여라.

(1) 오각뿔

(2) 사각기둥

(3) 사각뿔대

(4) 팔각뿔대

1. 연결 상태가 같은 도형

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

연결 상태가 같은 평면도형

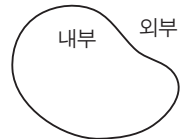
한 도형을 잘라 내거나 이어 붙이지 않고, 늘이거나 줄이거나 구부려서 그 도형 위의 서로 다른 두 점이 겹치지 않도록 변형한 도형을 처음 도형과 연결 상태가 같은 도형이라고 한다.

| **보기** | 다음의 도형은 모두 연결 상태가 같은 도형이다.

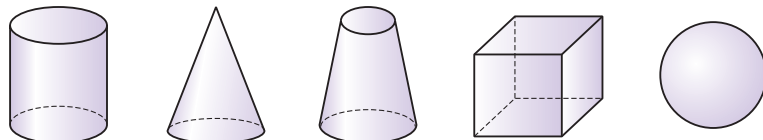
단일폐곡선

① 점과 선으로 된 도형 중에서 원과 연결 상태가 같은 도형을 (1) ☐ 이라고 한다.

② 단일폐곡선 위의 한 점에서 출발하여 곡선을 따라 한쪽 방향으로 나아가면, 그 곡선 위의 모든 점을 한 번씩만 지나서 다시 출발점으로 되돌아온다.

③ 단일폐곡선으로 둘러싸인 부분을 곡선의 (2) ☐, 그렇지 않은 부분을 곡선의 (3) ☐ 라고 한다.

연결 상태가 같은 입체도형

한 입체도형을 그 겉면이 겹쳐지거나 잘리지 않도록 잡아당기거나 늘이거나 줄여서 얻은 입체도형은 처음 입체도형과 연결 상태가 같은 도형이다.

| **보기** | 원기둥, 원뿔, 원뿔대, 각기둥, 각뿔, 각뿔대 등은 모두 구와 연결 상태가 같은 입체도형이다.

···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 156~160쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 단일폐곡선 (2) 내부 (3) 외부

2. 그래프

* ☐ 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

그래프의 뜻

① | **보기** | 와 같이 점과 선으로 이루어진 그림을 그래프라고 한다.

② 그래프에서 점을 꼭짓점, 꼭짓점을 연결한 선을 변이라고 한다.

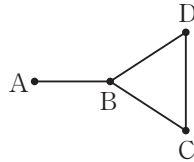
③ 한 꼭짓점에서 이어진 변을 따라 변을 반복하지 않으면서 다른 꼭짓점으로 이동할 때, 순서대로 꼭짓점을 나열한 것을 (1) ☐ 라고 한다.

④ 두 그래프가 연결 상태가 같은 도형일 때, 두 그래프는 동형이라고 한다.

| **보기** | 오른쪽 그림에서

① 꼭짓점의 집합: {A, B, C, D}

② 변의 집합: {AB, BC, BD, CD}

③ A에서 C로 가는 경로: ABC, ABDC

한붓그리기

① 연결된 그래프에서 한 꼭짓점에서 출발하여 꼭짓점을 여러 번 지날 수 있지만 모든 변을 한 번씩만 지나 어느 한 꼭짓점으로 가는 경로가 있을 때, 이 그래프는 한붓그리기가 가능하다고 한다.

② 한붓그리기가 가능한 그래프는 홀수점이 없거나 (2) ☐ 개인 경우이다.

- 홀수점이 없는 그래프는 어떤 점에서 출발하여도 그 출발점에서 끝난다.
- 홀수점이 (3) ☐ 개인 그래프는 한 홀수점에서 출발하여 다른 홀수점에서 끝난다.

연결된 평면그래프의 꼭짓점, 변, 면의 개수

꼭짓점의 개수를 v, 변의 개수를 e, 면의 개수를 f라고 하면

$$v-e+f=\text{(4)}\ \square$$

구와 연결 상태가 같은 입체도형의 꼭짓점, 모서리, 면의 개수

꼭짓점의 개수를 v, 모서리의 개수를 e, 면의 개수를 f라고 하면

$$v-e+f=\text{(5)}\ \square$$

···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 161~172쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 경로 (2) 2 (3) 2 (4) 2 (5) 2

바탕 다지기

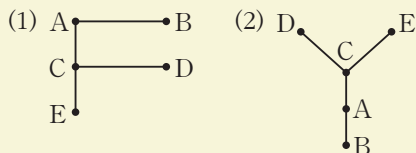
*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께 하기 |

1. 다음 두 그래프의 꼭짓점의 집합, 변의 집합을 구하고, 두 그래프가 서로 동형인지 말하여라.

(1)

(2)

[풀이]

(1) (꼭짓점의 집합)={A, B, C, D, E}

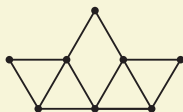
(변의 집합)={AB, AC, CD, CE}

(2) (꼭짓점의 집합)={A, B, C, D, E}

(변의 집합)={AB, AC, CD, CE}

두 그래프는 서로 동형이다.

2. 다음 그래프에서 꼭짓점의 개수 v, 변의 개수 e, 면의 개수 f를 각각 구하고, $v-e+f$를 구하여라.

[풀이]

$v=8$, $e=12$, $f=6$

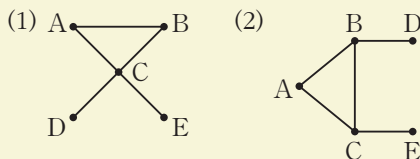
$\therefore v-e+f=8-12+6=2$

| 스스로 하기 |

1. 다음 두 그래프의 꼭짓점의 집합, 변의 집합을 구하고, 두 그래프가 서로 동형인지 말하여라.

(1)

(2)

[풀이]

(1) (꼭짓점의 집합)={A, B, C, D, E}

(변의 집합)

={AB, AC, ☐, ☐, ☐}

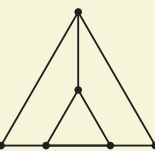
(2) (꼭짓점의 집합)={A, B, C, D, E}

(변의 집합)

={AB, AC, BC, ☐, ☐}

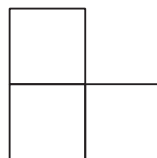
두 그래프는 서로 동형이 아니다.

2. 다음 그래프에서 꼭짓점의 개수 v, 변의 개수 e, 면의 개수 f를 각각 구하고, $v-e+f$를 구하여라.

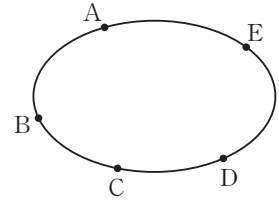
[풀이]

$v=6$, $e=$☐, $f=$☐

$\therefore v-e+f=6-$☐$+$☐$=$☐

교과서 165, 166쪽

1 오른쪽 그래프에 한붓그리기가 가능한 경로를 나타내어라.

프 로 젝 트

두 마을을 직접 연결하는 도로 만들기

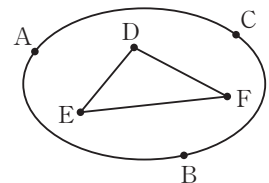
| 문제 | 단일폐곡선의 내부와 외부에 각각 한 점을 잡으면 두 점을 연결하는 선은 반드시 단일폐곡선과 만나게 된다. 이 성질을 이용하여 오른쪽 그림과 같이 A, B, C, D, E 다섯 마을이 하나의 순환 도로로 연결되어 있다고 할 때, 교차점이 없도록 두 마을 사이를 직접 연결하는 도로를 최대 몇개까지 만들 수 있는지 알아보자.

1단계_ A 마을과 직접 연결된 도로가 없는 다른 마을을 A와 선으로 모두 연결하여라.

2단계_ B 마을과 직접 연결된 도로가 없는 다른 마을을 **1단계**에서 그은 선과 만나지 않도록 직접 연결할 수 있는지를 알아보고, 연결이 가능한 마을을 B와 선으로 연결하여라.

3단계_ **2단계**에서 A, B, D 세 마을만을 지나는 단일폐곡선을 찾고, C와 E는 각각 이 단일폐곡선의 내부와 외부 중 어느 쪽에 있는지 알아보아라.
또 처음 주어진 선이나 **1단계**와 **2단계**에서 그은 선과 만나지 않도록 C와 E 두 마을을 직접 연결하는 선을 그을 수 있는지 알아보아라.

4단계_ 교차점이 없도록 두 마을 사이를 직접 연결하는 도로를 최대 몇개까지 만들 수 있는지 알아보아라.

논술/수행평가 과제

오른쪽 그림과 같이 A, B, C 세 마을이 하나의 순환 도로로 연결되어 있고, 그 순환 도로 안쪽에 D, E, F 세 마을이 다른 하나의 순환 도로로 연결되어 있다. 교차점이 없도록 두 마을 사이를 직접 연결하는 도로를 최대 몇개까지 만들 수 있는지 알아보자.

기본 익히기

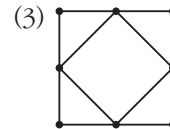
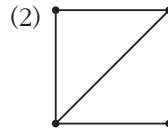
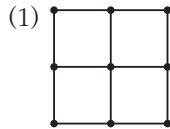
*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

1 다음 도형 중 서로 연결 상태가 같은 것끼리 짝지어라.

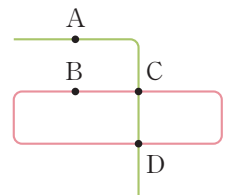
2 다음과 같은 꼭짓점과 변의 집합을 가지는 그래프를 그려라.

> (꼭짓점의 집합)={A, B, C, D, E}
> (변의 집합)={AC, AD, BD, BE, CE}

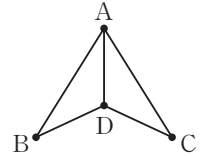
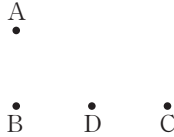
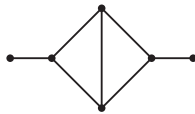
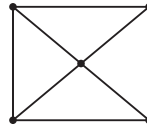
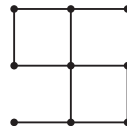
3 다음 그래프 중 한붓그리기가 가능한 것을 모두 찾아라.

(1) (2) (3)

4 연결된 평면그래프에서 꼭짓점의 개수가 10, 변의 개수가 10일 때, 면의 개수를 구하여라.

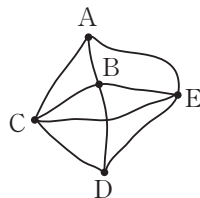
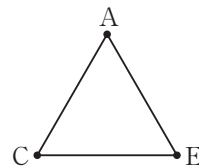
5 정십이면체를 평면그래프로 나타낼 때, 꼭짓점의 개수 v, 모서리의 개수 e, 면의 개수 f를 구하여라.

6 오른쪽 그림과 같이 A, C, D 지역을 지나는 버스 노선과 B, C, D 지역을 지나는 버스 노선이 있다. A, B, C, D 네 지역을 각각 꼭짓점으로 하고, 두 지역 사이를 버스를 갈아타지 않고 갈 수 있는 경우 두 꼭짓점을 변으로 연결하여 그래프로 나타내어라.

실력 키우기

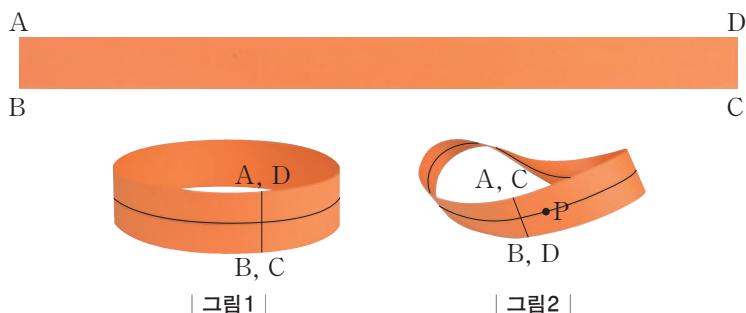
*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

1 오른쪽 그래프와 동형인 그래프가 되도록 다음 꼭짓점을 변으로 연결하여라.

2 다음 그래프 중 변을 1개 추가하였을 때, 한붓그리기가 가능한 것을 모두 찾아라.

3 구와 연결 상태가 같은 오면체에서 꼭짓점의 개수가 6일 때, 모서리의 개수를 구하여라.

4 정다면체를 평면그래프로 나타낼 때, 한붓그리기가 가능한 그래프를 찾아라.

5 다음 | 그림1 | 은 A, B, C, D, E 도시를 연결하는 도로망이다. 각 도시를 꼭짓점으로 하고, 각 도시를 연결하는 도로를 변으로 하는 그래프를 그리려고 한다. 이때, | 그림2 | 의 삼각형 안에 나머지 2개의 꼭짓점을 추가하여 그래프를 완성하여라.

| 그림1 | | 그림2 |

뫼비우스의 띠

길이가 긴 직사각형 종이를 | 그림1 | 과 같이 원통 모양으로 붙이고, 곡면 위에 선을 그으면 한쪽 면에만 선이 그어진다. 즉, 곡면의 안쪽과 바깥쪽이 구별된다. 그러나 | 그림2 | 와 같이 180° 꼬아 붙여 띠를 만든 후, 곡면 위의 한 점 P를 출발하여 선을 그어 보면 가장자리를 거치지 않고서도 다른 쪽 면 위에 선을 그을 수 있다. 즉, 이 곡면은 안쪽과 바깥쪽을 구별할 수 없다.

| 그림1 | | 그림2 |

엑스포 과학 공원에 있는 뫼비우스의 띠 모양의 구조물

이와 같이 직사각모양 띠를 꼬아 만든 곡면을 뫼비우스의 띠라고 한다. 이것은 1858년 독일의 수학자이자 천문학자인 뫼비우스(Möbius, A. F. ; 1790~1868)와 리스팅(Listing, J. B. ; 1808~1882)이 같은 시기에 독립적으로 발견하였다.

확인학습

1 오른쪽 그림과 같이 원통 모양의 곡면과 뫼비우스의 띠를 만든 후, 선을 따라 잘라 보고, 그 결과를 말하여라.

2 뫼비우스의 띠를 오른쪽 그림과 같이 폭의 $\frac{1}{3}$이 되는 두 개의 선을 따라 잘라 보고, 그 결과를 말하여라.

3. 그래프와 최적화

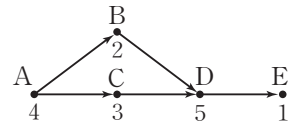
* [ ] 안에 알맞은 것을 채워 가면서 교과서에서 학습한 내용을 확인해 보세요.

● 순서를 정하여 실행하거나 계획을 세우는 문제

각 작업을 꼭짓점으로 하고, 두 작업 사이의 선후 관계를 화살표로 표시하여 그래프로 나타내면 작업 일정을 보다 쉽게 파악할 수 있다. 이때, 전체 작업을 마치기 위해 필요한 최소의 시간은 시작에서 마지막 작업까지의 경로 중에서 작업 시간이 가장 긴 경로로 결정된다.

| 보기 | A, B, C, D, E 작업에 걸리는 시간과 작업 순서가 오른쪽 그림과 같을 때, A에서 E로 가는 경로와 걸린 시간은 다음과 같다.

A → B → D → E : (1) [   ] (시간)

A → C → D → E : (2) [   ] (시간)

● 각 꼭짓점을 연결하는 방법으로 모형화하는 문제

변에 어떤 값을 가지는 그래프로 나타낸 후 변의 값의 합을 최소로 하면서 단일폐곡선이 없는 연결된 그래프로 만드는 문제로 모형화할 수 있는 문제는 다음과 같은 방법으로 해결한다.

❶ 그래프에서 가장 큰 값을 가지는 변을 제거한다. 그러나 연결된 그래프가 되지 않으면 그 다음 큰 값을 가지는 변을 제거한다. 이때, 같은 값을 가지는 변이 있으면 그 중 임의로 한 변을 제거한다.

❷ 남은 그래프가 단일폐곡선이 없는 연결된 그래프인지를 확인한다.

❸ 단일폐곡선이 있으면 ❶로 되돌아간다.

❹ 단일폐곡선이 없으면 이 과정을 끝낸다.

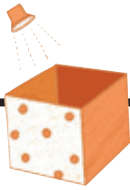
| 참고 | 가장 작은 값을 가지는 변을 차례로 택하면서 각 꼭짓점을 이어 단일폐곡선이 없는 연결된 그래프를 만들어 갈 수도 있다.

● 최적의 경로

① 그래프에서 각 변의 값의 합이 최소 또는 최대가 되는 경로를 (3) [   ]라고 한다.

② 최적의 경로를 결정하는 효과적인 알고리즘은 알려져 있지 않으므로 가능한 모든 경로를 확인하여야 한다.

···› 내용 정리가 부족한 학생은 **교과서 173~178쪽**을 공부하여 개념을 확실히 익히세요.

답 (1) 12 (2) 13 (3) 최적의 경로

바탕 다지기

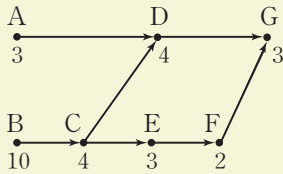
*기초 개념을 확인하고 계산 능력을 기르기 위한 문제입니다.

| 함께하기 |

1. 어느 사진 동호회에서 회원들의 작품을 모아 전시회를 열기로 하였다. 다음 표는 이 전시회를 준비하는 데 필요한 작업과 각 작업에 걸리는 시간 및 작업의 순서 관계를 나타낸 것이다. 이 전시회를 끝마치는 데 필요한 최소의 시간은 며칠인지 구하여라.

	작업	작업 시간 (일)	먼저 해야 할 작업
A	장소 선정	3	없음
B	작품 모집	10	없음
C	전시회 작품 선정	4	B
D	전시회장 꾸미기	4	A, C
E	포스터 작성	3	C
F	포스터 붙이기	2	E
G	전시	3	D, F

〔풀이〕

각 작업과 순서를 그래프를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

A에서 G 또는 B에서 G로 가는 모든 경로와 걸리는 시간은

A→D→G: 3+4+3=10(일)

B→C→D→G: 10+4+4+3=21(일)

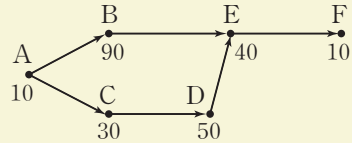
B→C→E→F→G: 10+4+3+2+3
=22(일)

따라서 전시회를 끝마치는 데 필요한 최소의 시간은 22일이다.

1. 다음 표는 대청소에 필요한 작업과 각 작업에 걸리는 시간 및 작업의 순서 관계를 나타낸 것이다. 모든 작업을 끝마치는 데 필요한 최소의 시간은 몇 분인지 구하여라.

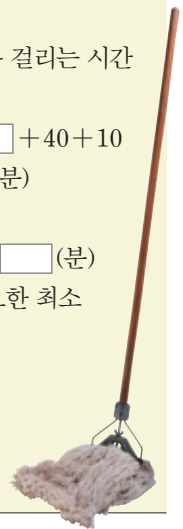
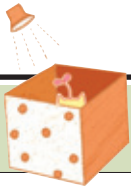
	작업	작업 시간 (분)	먼저 해야 할 작업
A	전등 먼지 털기	10	없음
B	욕실 청소	90	A
C	부엌 청소	30	A
D	거실 및 방 청소	50	C
E	유리창 닦기	40	B, D
F	쓰레기 버리기	10	E

〔풀이〕

각 작업과 순서를 그래프를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

A에서 F까지 가는 모든 경우와 걸리는 시간은

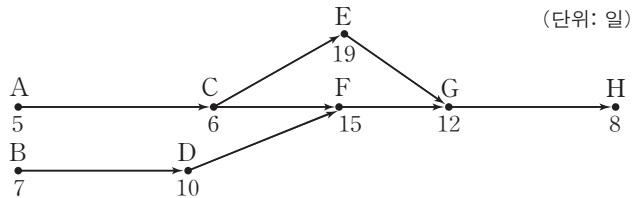
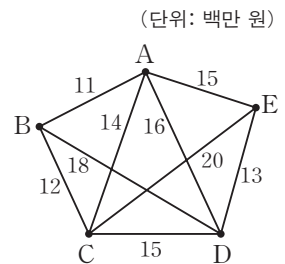
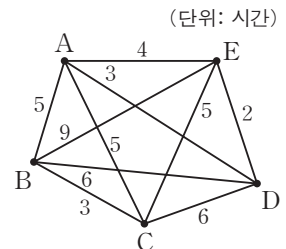
A→☐→E→F: 10+☐+40+10
=☐(분)

A→☐→D→E→F
: 10+☐+50+40+10=☐(분)

따라서 청소를 끝마치는 데 필요한 최소의 시간은 150분이다.

기 본 익 히 기

*기본 실력을 확인하고 응용 능력을 기르기 위한 문제입니다.

필요한 최소의 시간은 시작에서 마지막 작업까지의 경로 중에서 작업 시간이 가장 긴 경로로 결정된다.

1 어느 건설 회사에서 다리를 건설하기 위해 필요한 8가지 작업 A, B, C, D, E, F, G, H에 각각 걸리는 시간과 작업 순서를 그래프로 나타내면 다음과 같다. 이 다리 건설을 끝마치는 데 필요한 최소의 시간은 며칠인지 구하여라.

2 오른쪽 그래프는 다섯 마을 A, B, C, D, E 사이에 포장도로를 닦는 데 드는 비용을 나타낸 것이다. 포장도로를 이용하여 다섯 마을에 모두 갈 수 있도록 할 때, 포장도로를 닦는 데 드는 최소 비용을 구하여라.

3 오른쪽 그래프는 다섯 도시 A, B, C, D, E 사이를 버스로 이동하는 데 걸리는 시간을 나타낸 것이다. A 도시에서 출발하여 다른 네 도시를 모두 지나 다시 A 도시로 돌아올 때, 걸리는 최소의 시간은 몇 시간인지 구하여라.

실 력 키 우 기

*다양한 유형에 대한 활용 능력을 키워 실력을 향상시키는 문제입니다.

예상 소요 시간 및 순서 관계를 그래프로 나타낸다.

1 다음 표는 교내 체육 대회의 각 경기와 일정에 포함된 여러 행사에 대한 항목과 예상 소요 시간 및 순서 관계를 나타낸 것이다. 체육 대회를 끝마치는 데 필요한 최소의 시간은 몇 분인지 구하여라.

	항목	예상 소요 시간(분)	먼저 해야 할 항목
A	개회식	30	없음
B	준비 체조	10	A
C	점심 식사	60	F, G
D	폐회식	30	H
E	축구	120	C
F	농구	60	B
G	피구	40	B
H	줄다리기	40	E

2 오른쪽 표는 다섯 개의 건물 A, B, C, D, E 사이를 비 가림 연결 통로로 공사를 하는 데 드는 비용을 나타낸 것이다. 비 가림 연결 통로를 이용하여 다섯 건물 사이를 이동할 수 있도록 할 때, 연결 통로로 공사를 하는 데 드는 최소 비용을 구하여라.

(단위: 백만 원)

	A	B	C	D	E
A		9	10	11	10
B	9		12	8	13
C	10	12		11	14
D	11	8	11		9
E	10	13	14	9	

3 오른쪽 표는 택배 회사 O와 물건을 배달할 네 곳 P, Q, R, S 사이의 거리를 나타낸 것이다. 회사를 출발하여 네 곳에 물건을 배달하고 회사로 돌아오는 데 P는 Q보다 먼저 배달해야 한다고 한다. 이때, 최소 이동 거리를 구하여라.

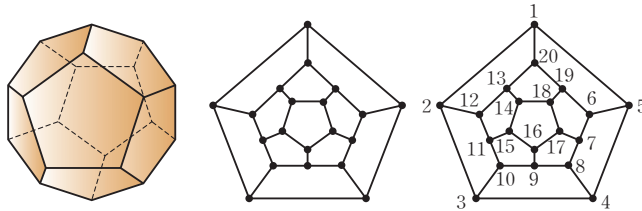
(단위: km)

	O	P	Q	R	S
O		6	8	5	4
P	6		4	3	6
Q	8	4		7	5
R	5	3	7		3
S	4	6	5	3	

해밀턴의 세계 일주 게임

19세기 영국의 수학자 해밀턴은 그래프와 관련된 여러 가지 재미있는 문제를 제기하였는데 그 중에는 아직까지 완전히 해결되지 않은 문제도 있다.

'세계 일주 게임' 은 그가 1857년에 소개한 것으로, 정십이면체의 20개의 각 꼭짓점에 세계의 유명한 도시의 이름을 붙인 후, 어느 한 도시를 출발하여 모서리를 따라 다른 도시를 모두 방문하고 처음 도시로 돌아오는 게임이다. 이때, 한 번 방문한 도시는 다시 방문하지 않는다.

해밀턴은 정십이면체를 평면그래프로 나타내어 이 문제를 다음 그림과 같이 해결하였다.

위의 게임에서와 같이 같은 길을 지나지 않고 주어진 그래프 상의 점을 모두 한 번씩 지나서 출발점으로 돌아올 수 있는 길을 '해밀턴 폐쇄로' 라고 한다. 해밀턴 폐쇄로 문제는 '어떤 경우에 해밀턴 폐쇄로가 있는가' 를 묻는 문제인데, 아직도 완전히 해결되지 않은 수학의 난제 중 하나로 꼽힌다.

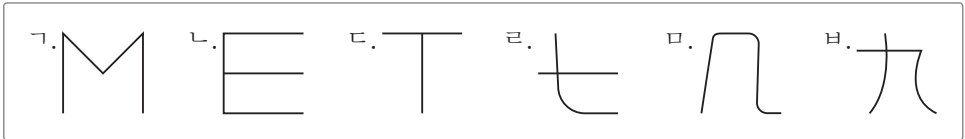
한편 해밀턴 폐쇄로에 통과하는 길의 거리까지 포함시킨 '순회 영업 사원 문제(travelling salesman problem)' 라는 것도 있다. 이는 '영업 사원 순회 문제' 또는 '우편집배원 문제' 라고도 불리는데, 영업 사원이 한 도시를 출발하여 모든 도시를 통과한 다음 처음 출발했던 도시로 돌아오는 최단 경로를 찾는 문제이다. 최소 경비로 영업 사원이 모든 도시를 방문하거나 최단 거리로 집배원이 모든 편지를 배달하기 위해서는 이동하는 각 선에 교통비나 이동 거리와 같은 가중치을 두어 해밀턴 폐쇄로를 찾아야 한다. 이 문제는 아직도 효율적인 알고리즘을 찾지 못한 난제로 남아 있으며, 그래프에서 가능한 모든 해밀턴 폐쇄로를 찾아 비교해야 하기 때문에 통과하는 지점 수가 늘어나면 컴퓨터로도 처리하는 데 많은 시간이 필요하게 된다.

실생활에서 여러 지역에 물건을 효율적으로 배송하는 경로를 찾거나, 적은 경비로 여러 관광지를 여행하는 관광 코스를 찾을 때 등에서 이와 같은 문제 해결 방법은 유용하게 활용되고 있다.

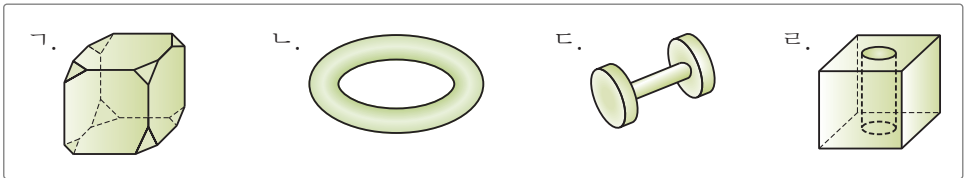
V 대 단 원 확 인 하 기

1 ★

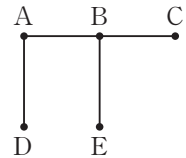
이해

다음 도형 중 연결 상태가 같은 것끼리 짝지어라.

2 ★

이해

다음 입체도형 중 연결 상태가 같은 것끼리 짝지어라.

3 ★★

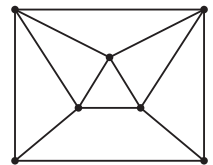
이해

오른쪽 그림과 같은 그래프에서 서로 다른 모든 경로의 개수를 구하여라.

4 ★

추론

오른쪽 그래프에 대하여 다음 물음에 답하여라.

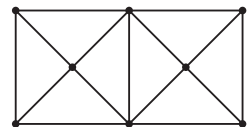
(1) 한붓그리기가 가능한지 말하여라.

(2) 꼭짓점의 개수 v, 변의 개수 e, 면의 개수 f를 구하고, $v-e+f$의 값을 구하여라.

5 ★★

의사소통

오른쪽 그래프에 한붓그리기가 가능하도록 변을 추가할 때, 최소한 몇 개의 변을 추가해야 하는지를 말하여라.

의사소통

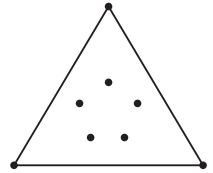
6 ★★

사각뿔과 사각뿔대를 각각 평면그래프로 나타내어라.

창의성

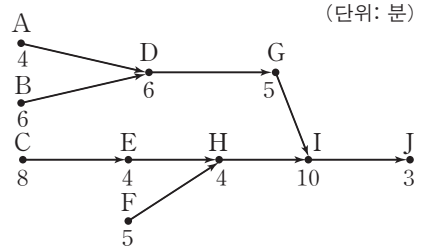
7 ★★

오른쪽 그림은 삼각형의 내부에 5개의 꼭짓점을 추가한 것이다. 꼭짓점의 개수가 8, 변의 개수가 13, 면의 개수가 7인 그래프를 그려라.

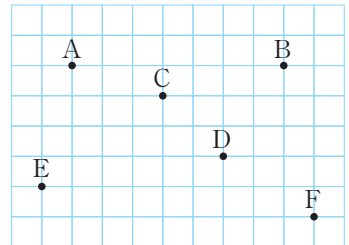
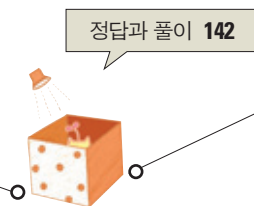
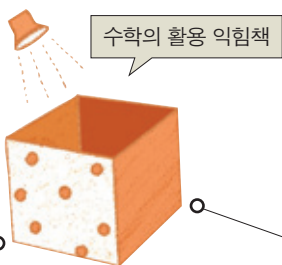
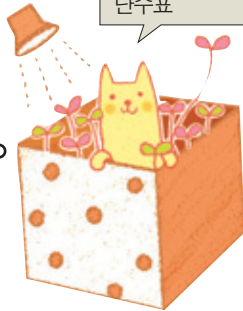
문제 해결

8 ★★

오른쪽 그림은 어느 음식을 만드는 데 필요한 열 가지 작업의 소요 시간과 순서 관계를 그래프로 나타낸 것이다.
이 음식을 만드는 데 필요한 최소의 시간은 몇 분인지 구하여라.

문제 해결

9 ★★★

오른쪽 그림은 여섯 마을 A, B, C, D, E, F의 위치를 모눈 위에 나타낸 것이다. 이 여섯 마을에 가스를 공급하기 위하여 배관 공사를 하려고 하는데 두 마을 사이의 거리가 a km이면 공사 비용이 a^2백만 원이라고 한다. 모든 마을에 가스가 공급되도록 배관 공사를 할 때, 최소 비용을 구하여라.
(단, 모눈 한 칸이 나타내는 거리는 1 km이고, 배관은 마을에서만 나눈다고 가정한다.)

수학의 활용 익힘책
정답과 풀이 142

부록

Ⅰ. 명제와 논리

1. 합성명제와 논리 회로

합성명제와 논리 회로에 들어가기 전에 / P. 11

1 (1) 명제가 아니다.
(2) $2+3=5$이므로 거짓인 명제이다.
(3) 울릉도는 섬이므로 참인 명제이다.
(4) 명제가 아니다.
따라서 명제인 것은 (2), (3)이고 각각 거짓, 참이다.

2 (1) $3\times2\neq6$, 거짓
(2) 2는 3의 약수가 아니다. 참
(3) 고래는 어류이다. 거짓

3 (1) $x=0$이고 $y=0$이면 $x+y=0$이다. ∴ 참
(2) (반례) $x=1$이고 $y=0$이면 $xy=0$이지만 $x\neq0$이다. ∴ 거짓
(3) (반례) $x=\frac{1}{2}$이면 $x<1$이지만 $x^2=\frac{1}{4}<1$이다. ∴ 거짓
(4) a와 b가 모두 홀수이면 ab는 홀수이다. ∴ 참

4 역: $x>2$이면 $x>1$이다. 참
이: $x\leq1$이면 $x\leq2$이다. 참
대우: $x\leq2$이면 $x\leq1$이다. 거짓

1. 합성명제

바탕 다지기 / P. 13

| 스스로 하기 |
1 (1) 이고, 이거나
(2) 거짓(F), 참(T), 거짓(F), 참(T)

1 (1) $1+1=2$, 참(T)
(2) 어떤 사람은 죽지 않는다. 거짓(F)
(3) 모든 x에 대하여 $x^2-2\leq0$이다. 거짓(F)
(4) 2002년 월드컵 축구 경기의 개막식은 대한민국에서 열리지 않았다. 거짓(F)

기본 익히기 / P. 14

1 (1) 9는 소수가 아니다. ∴ 참(T)
(2) 가우스는 수학자이고, 모차르트는 음악가이다. ∴ 참(T)
(3) (반례) 고래는 포유류이지만 다리가 없다. ∴ 거짓(F)
(4) 고모는 아버지의 누이이다. ∴ 참(T)

2 논리곱 $p\wedge q$의 진리표는 다음과 같다.

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

(1) 논리곱 $p\wedge q$는
'은행나무는 암그루와 수그루의 구별이 있고, 감나무는 암그루와 수그루의 구별이 없다.'
이다.
한편 명제 p의 진릿값은 참(T)이고, 명제 q의 진릿값도 참(T)이므로 논리곱 $p\wedge q$의 진릿값은 위의 진리표에 의하여 참(T)이다.
(2) 논리곱 $p\wedge q$는
'무화과 나무에는 꽃이 피지 않고, 열매가 열리지 않는다.'
이다.
한편 명제 p의 진릿값은 거짓(F)이고, 명제 q의 진릿값도 거짓(F)이므로 논리곱 $p\wedge q$의 진릿값은 위의 진리표에 의하여 거짓(F)이다.

3 논리합 $\sim p\vee q$의 진리표는 다음과 같다.

p	q	$\sim p$	$\sim p\vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

(1) 명제 $\sim p$는
'이구아나는 포유류가 아니다.'
이므로 논리합 $\sim p\vee q$는
'이구아나는 포유류가 아니거나, 거북이는 파충류이다.'
이다.

한편 명제 p의 진릿값은 거짓(F)이고, 명제 q의 진릿값은 참(T)이므로 논리합 $\sim p \vee q$의 진릿값은 위의 진리표에 의하여 참(T)이다.

(2) 명제 $\sim p$는

'달은 행성이 아니다.'

이므로 논리합 $\sim p \vee q$는

'달은 행성이 아니거나, 금성은 행성이다.'

이다.

한편 명제 p의 진릿값은 거짓(F)이고, 명제 q의 진릿값은 참(T)이므로 논리합 $\sim p \vee q$의 진릿값은 위의 진리표에 의하여 참(T)이다.

4 합성명제 $p \wedge \sim p$의 진리표는 다음과 같다.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	F
F	T	F

따라서 합성명제 $p \wedge \sim p$의 진릿값은 항상 거짓(F)이다.

5 태양과 가장 가까운 행성은 금성이 아니다. 참(T)

실력 키우기 / P. 15

1 (1) 허수 i는 방정식 $x^2+1=0$의 한 근이므로 진릿값은 참(T)이다.

(2) 상어는 어류이므로 진릿값은 거짓(F)이다.

(3) 사람과 기린의 목뼈의 개수는 7개로 같으므로 진릿값은 참(T)이다.

(4) 밀물과 썰물은 달의 영향을 받으므로 진릿값은 참(T)이다.

따라서 진릿값이 참인 명제는 (1), (3), (4)이다.

2 합성명제 $p \vee (\sim p \wedge q)$의 진리표는 다음과 같다.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$p \vee (\sim p \wedge q)$
T	T	F	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

(1) p: 대한민국의 국화는 무궁화이다. 참(T)

q: 중국의 국화는 벚꽃이다. 거짓(F)

이므로 합성명제 $p \vee (\sim p \wedge q)$의 진릿값은 위의 진리표에 의하여 참(T)이다.

(2) p: 대한민국의 국회 의원직은 급여가 없는 명예직이다. 거짓(F)

q: 대한민국의 대통령은 간접 선거로 선출한다. 거짓(F)

이므로 합성명제 $p \vee (\sim p \wedge q)$의 진릿값은 앞의 진리표에 의하여 거짓(F)이다.

3 합성명제 $\sim p \wedge (q \vee r)$의 진리표는 다음과 같다.

p	q	r	$\sim p$	$q \vee r$	$\sim p \wedge (q \vee r)$
T	T	T	F	T	F
T	T	F	F	T	F
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F

p: 농구는 각 팀별로 6명의 선수가 경기를 한다. 거짓(F)

q: 축구는 각 팀별로 11명의 선수가 경기를 한다. 참(T)

r: 야구는 각 팀별로 10명의 선수가 경기를 한다. 거짓(F)

이므로 합성명제 $\sim p \wedge (q \vee r)$의 진릿값은 위의 진리표에 의하여 참(T)이다.

4 두 합성명제 $p \wedge (q \vee r)$와 $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$의 진리표는 각각 다음과 같다.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	T	F	T	F
F	F	T	T	F
F	F	F	F	F

p	q	r	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	F	F

따라서 위의 두 진리표에 의하여 두 합성명제의 진릿값이 항상 같음을 알 수 있다.

5 두 합성명제 $\sim(p\vee q)$와 $\sim(p\wedge q)$의 진리표는 각각 다음과 같다.

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

p: 진공 속에서 빛이 1년 동안 이동한 거리를 1광년 이라고 한다. 참(T)
q: 1 mm는 10^{-3} m이다. 참(T)
이므로 합성명제 $\sim(p\vee q)$의 진릿값은 진리표에 의하여 거짓(F)이고, 합성명제 $\sim(p\wedge q)$의 진릿값도 진리표에 의하여 거짓(F)이다.
따라서 두 합성명제 $\sim(p\vee q)$와 $\sim(p\wedge q)$의 진릿값은 같다.

2. 쌍조건문

바탕 다지기 / P. 17

| 스스로 하기 |
1 F, T, F, T

1 조건문 $p \longrightarrow q$와 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$의 진리표는 다음과 같다.

p	q	$p\longrightarrow q$	$p\longleftrightarrow q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	F	T	T

(1) p: 추석에 보이는 달은 보름달이다. 참(T)
q: 설날에 보이는 달은 반달이다. 거짓(F)
이므로 조건문 $p \longrightarrow q$와 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값은 위의 진리표에 의하여 모두 거짓(F)이다.

(2) p: 설악산은 강원도에 있다. 참(T)
q: 한라산은 제주특별자치도에 있다. 참(T)
이므로 조건문 $p \longrightarrow q$와 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값은 위의 진리표에 의하여 모두 참(T)이다.

기본 익히기 / P. 18

1 (1)

p	q	$\sim q$	$p\wedge\sim q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

(2)

p	q	$\sim q$	$p\vee\sim q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

(3)

p	q	$p\longrightarrow q$	$\sim(p\longrightarrow q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	F

(4)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\longrightarrow\sim q$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

따라서 두 합성명제 (1) $p\wedge\sim q$와 (3) $\sim(p\longrightarrow q)$는 동치명제이고, 두 합성명제 (2) $p\vee\sim q$와 (4) $\sim p\longrightarrow\sim q$도 동치명제이다.

2 조건문 $p \longrightarrow q$의 진리표는 오른쪽과 같다.

p	q	$p \longrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(1) 명제 p의 진릿값은 참(T)이고, 명제 q의 진릿값도 참(T)이므로 조건문 $p \longrightarrow q$의 진릿값은 참(T)이다.

(2) 명제 p의 진릿값은 참(T)이고, 명제 q의 진릿값은 거짓(F)이므로 조건문 $p \longrightarrow q$의 진릿값은 거짓(F)이다.

3 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$의 진리표는 오른쪽과 같다.

p	q	$p \longleftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

(1) 명제 p의 진릿값은 거짓(F)이고, 명제 q의 진릿값도 거짓(F)이므로 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값은 참(T)이다.

(2) 명제 p의 진릿값은 참(T)이고, 명제 q의 진릿값은 거짓(F)이므로 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값은 거짓(F)이다.

4 두 조건문 $p \longrightarrow q$와 $\sim q \longrightarrow \sim p$의 진리표는 각각 다음과 같다.

p	q	$p \longrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \longrightarrow \sim p$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

따라서 위의 진리표에 의하여 두 조건문 $p \longrightarrow q$와 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 서로 동치명제임을 알 수 있다.

5 두 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$와 $\sim p \longleftrightarrow \sim q$의 진리표는 각각 다음과 같다.

p	q	$p \longleftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \longleftrightarrow \sim q$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

따라서 위의 진리표에 의하여 두 쌍조건문 $p \longleftrightarrow q$와 $\sim p \longleftrightarrow \sim q$는 서로 동치명제임을 알 수 있다.

실력 키우기 / P. 20

1 (1)

p	q	$\sim q$	$p \longleftrightarrow \sim q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F

(2)

p	q	$\sim p$	$q \longleftrightarrow \sim p$
T	T	F	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	F

(3)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \vee q$	$(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	F
F	F	T	T	T	T	T

(4)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim p \vee \sim q$	$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T	F

따라서 주어진 합성명제 중 서로 동치명제인 것은 (1), (2), (4)이다.

2 합성명제 $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$의 진리표는 다음과 같다.

p	q	$p \longrightarrow q$	$q \longrightarrow p$	$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

(1) 명제 p의 진릿값은 거짓(F)이고, 명제 q의 진릿값은 참(T)이므로 위의 진리표에 의하여 주어진 합성명제의 진릿값은 거짓(F)이다.

(2) 명제 p의 진릿값은 참(T)이고, 명제 q의 진릿값도 참(T)이므로 위의 진리표에 의하여 주어진 합성명제의 진릿값은 참(T)이다.

3 합성명제 $p \longrightarrow (q \longleftrightarrow r)$의 진리표는 다음과 같다.

p	q	r	$q \longleftrightarrow r$	$p \longrightarrow (q \longleftrightarrow r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	T	T

명제 p, q, r의 진릿값은 각각 참(T), 참(T), 거짓(F)이므로 위의 진리표에 의하여 합성명제 $p \longrightarrow (q \longleftrightarrow r)$의 진릿값은 거짓(F)이다.

4 $p \longrightarrow q$는 $\sim p \vee q$와 서로 동치명제이므로
$p \longrightarrow \sim q$와 $\sim p \vee \sim q$는 서로 동치명제이다.
$\sim p \vee \sim q$와 $\sim q \vee \sim p$는 서로 동치명제이다.
$\sim q \vee \sim p$와 $q \longrightarrow \sim p$는 서로 동치명제이다.
따라서 $p \longrightarrow \sim q$와 $q \longrightarrow \sim p$는 서로 동치명제이다.

5 두 합성명제 $(p \longrightarrow q) \longrightarrow r$와 $p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$의 진리표는 각각 다음과 같다.

p	q	r	$p \longrightarrow q$	$(p \longrightarrow q) \longrightarrow r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	T	T
F	F	F	T	F

p	q	r	$q \longrightarrow r$	$p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

따라서 위의 두 진리표에 의하여 두 합성명제는 서로 동치명제가 아님을 알 수 있다.

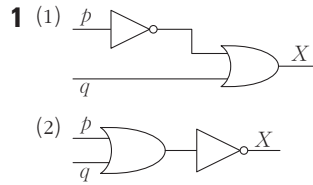
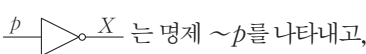
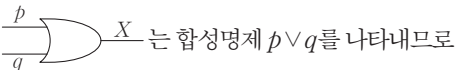
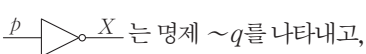
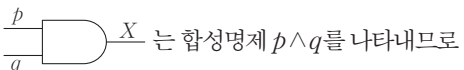
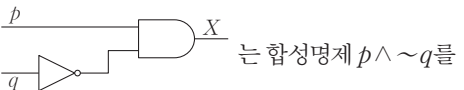
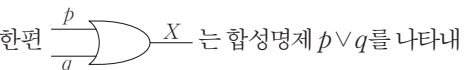
3. 논리 회로

바탕 다지기 / P. 23

| 스스로 하기 |

1 (1) $p \wedge q$, $p \vee q$, $(p \wedge q) \vee r$
(2) $\sim p$, $p \vee q$, $\sim p \vee \sim q$

1 (1)

(2)

기본 익히기 / P. 24

1 (2) 옳지 않다. 논리합 회로는 입력 조건 중 어느 하나만 참(1)이어도 그 결과는 참(1)이다.
따라서 논리 회로에 대한 설명으로 옳은 것은 (1), (3), (4)이다.

2 (1) [p, X] 는 명제 $\sim p$를 나타내고,
[p, q, X] 는 합성명제 $p \vee q$를 나타내므로
주어진 기호는 합성명제 $\sim p \vee q$를 나타낸다.

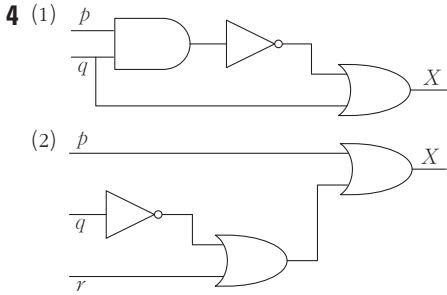
(2) [p, X] 는 명제 $\sim q$를 나타내고,
[p, q, X] 는 합성명제 $p \wedge q$를 나타내므로
[p, q, X] 는 합성명제 $p \wedge \sim q$를 나타낸다.
한편 [p, q, X] 는 합성명제 $p \vee q$를 나타내므로 주어진 기호는 합성명제 $(p \wedge \sim q) \vee r$를 나타낸다.

3 (1) 주어진 그림의 논리 회로를 기호로 나타내면

이므로 주어진 논리 회로가 나타내는 합성명제는 $\sim(p \vee q)$이다.

(2) 주어진 논리 회로를 기호로 나타내면

이므로 주어진 논리 회로가 나타내는 합성명제는 $\sim(p \wedge q)$이다.

4 (1)

5 주어진 논리 회로는 합성명제 $\sim(p \vee q)$를 나타내므로 진리표는 다음과 같다.

p	q	$p \vee q$	$X=\sim(p \vee q)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

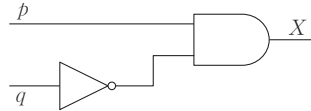
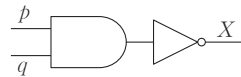
실력 키우기 / P. 25

1 (1) 주어진 논리 회로는 합성명제 $(p \wedge \sim q) \vee r$를 나타내므로 진리표는 다음과 같다.

p	q	r	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \vee r$
T	T	T	F	F	T
T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	T
F	F	F	T	F	F

(2) 주어진 논리 회로는 합성명제 $\sim(p \vee q) \vee \sim r$를 나타내므로 진리표는 다음과 같다.

p	q	r	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim r$	$\sim(p \vee q) \vee \sim r$
T	T	T	T	F	F	F
T	T	F	T	F	T	T
T	F	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	T	F	F	F
F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	F	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T

2 $p \longrightarrow q$와 $\sim p \vee q$는 서로 동치명제이므로 $\sim(p \longrightarrow q)$와 $\sim(\sim p \vee q)$, 즉 $p \wedge \sim q$는 서로 동치명제이다.
따라서 합성명제 $\sim(p \longrightarrow q)$, 즉 $p \wedge \sim q$를 나타내는 논리 회로의 기호는 다음과 같다.

3 주어진 진리표는 $\sim(p \wedge q)$의 진리표와 같으므로 해당하는 논리 회로의 기호는 다음과 같다.

4 주어진 규칙은 논리곱에 해당하므로 이를 나타내는 합성명제는 (2) $p \wedge q$이다.

실생활 문제 해결하기 / P. 26

1단계 (1) 제비가 날아온다.
(2) 아리스토텔레스는 죽는다.

2단계 (1)

p	q	$p \longrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(2)

p	q	r	$p \longrightarrow q$	$q \longrightarrow r$	$p \longrightarrow r$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

3단계 (1) **2단계** (1)의 진리표에서 조건문 $p \longrightarrow q$와 명제 p의 진릿값이 각각 참(T)일 때, 명제 q의 진릿값은 참(T)임을 알 수 있다.

(2) **2단계** (2)의 진리표에서 조건문 $p \longrightarrow q$와 $q \longrightarrow r$의 진릿값이 각각 참(T)일 때, 조건문 $p \longrightarrow r$의 진릿값은 참(T)임을 알 수 있다.

4단계 **3단계**의 진리표에 의하여 **1단계**의 각 추론이 옳음을 알 수 있다.

읽기 자료 / P. 27

논술/수행평가 과제

나는 참말을 한 죄로 교수형에 처해질 것이다.

대단원 확인하기 P. 28, 29

1 (1) 추석은 음력으로 8월 15일이므로 주어진 명제의 진릿값은 거짓(F)이다.

(2) 참(T)

2 (1) p: 태풍은 바다에서 생겨난다. 참(T)

q: 태풍은 육지에서 생겨난다. 거짓(F)

따라서 주어진 합성명제 $p \vee q$의 진릿값은 참(T)이다.

(2) p: 파스칼은 덧셈과 뺄셈이 가능한 계산기를 만들었다. 참(T)

q: 라이프니츠는 사칙계산이 가능한 계산기를 만들었다. 참(T)

따라서 주어진 합성명제 $p \wedge q$의 진릿값은 참(T)이다.

3 (1) 명제 p의 진릿값은 참(T)이고, 명제 q의 진릿값은 거짓(F)이다.

따라서 합성명제 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값은 거짓(F)이다.

(2) 명제 p의 진릿값은 거짓(F)이고, 명제 q의 진릿값도 거짓(F)이다.

따라서 합성명제 $p \longleftrightarrow q$의 진릿값은 참(T)이다.

4 (1)

p	q	$p \longrightarrow q$	$p \wedge (p \longrightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	F	T	F

(2)

p	q	$p \longrightarrow q$	$(p \longrightarrow q) \wedge q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

(3)

p	q	$p \longrightarrow q$	$(p \longrightarrow q) \vee q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

(4)

p	q	$p \longrightarrow q$	$p \vee (p \longrightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

따라서 항상 참인 명제는 (4) $p \vee (p \longrightarrow q)$이다.

5 (1)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \longrightarrow q$	$\sim p \longrightarrow \sim q$	$(p \longrightarrow q) \wedge (\sim p \longrightarrow \sim q)$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T

(2)

p	q	$p \longleftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

(3)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim(p \vee q) \vee (p \wedge q)$
T	T	T	T	F	T
T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	F	F	T	T

(4)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge q$	$p \wedge \sim q$	$(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	F	F	F

따라서 서로 동치명제인 것은 (1), (2), (3)이다.

6

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

7 두 합성명제 $(p \vee q) \longrightarrow r$와 $(p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r)$의 진리표는 각각 다음과 같다.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \longrightarrow r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

p	q	r	$p \longrightarrow r$	$q \longrightarrow r$	$(p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

따라서 앞의 두 진리표에 의하여 두 합성명제의 진릿값이 모든 경우에 대하여 항상 같으므로 두 합성명제 $(p \vee q) \longrightarrow r$와 $(p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r)$는 서로 동치명제임을 알 수 있다.

8 (1)

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	$q \vee p$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

따라서 위의 진리표에 의하여 두 합성명제 $p \vee q$와 $q \vee p$는 서로 동치명제임을 알 수 있다.

(2)

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$q \wedge p$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

따라서 위의 진리표에 의하여 두 합성명제 $p \wedge q$와 $q \wedge p$는 서로 동치명제임을 알 수 있다.

(3)

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	F	F
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

p	q	r	$q\wedge r$	$p\wedge(q\wedge r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
T	F	F	F	F
F	T	T	T	F
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

따라서 앞의 두 진리표에 의하여 두 합성명제 $(p\wedge q)\wedge r$와 $p\wedge(q\wedge r)$는 서로 동치명제이다.

(4)

p	q	r	$q\wedge r$	$p\vee(q\wedge r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	T
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

p	q	r	$p\vee q$	$p\vee r$	$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F
F	F	F	F	F	F

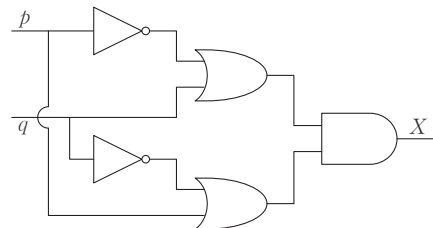
따라서 위의 두 진리표에 의하여 두 합성명제 $p\vee(q\wedge r)$와 $(p\vee q)\wedge(p\vee r)$는 서로 동치명제임을 알 수 있다.

9 주어진 논리 회로의 기호는 합성명제 $\sim\{(\sim p\vee\sim q)\wedge r\}$를 나타내고, 이 합성명제의 진리표는 다음과 같다.

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q$	$(\sim p\vee\sim q)\wedge r$	$\sim\{(\sim p\vee\sim q)\wedge r\}$
T	T	T	F	F	F	F	T
T	T	F	F	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T	F
T	F	F	F	T	T	F	T
F	T	T	T	F	T	T	F
F	T	F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T	F
F	F	F	T	T	T	F	T

따라서 주어진 논리 회로의 진리표는 다음과 같다.

p	q	r	X
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

10 주어진 규칙은 쌍조건문에 해당한다.
쌍조건문 $p\longleftrightarrow q$는 $(p\longrightarrow q)\wedge(q\longrightarrow p)$와 서로 동치명제이고, $p\longrightarrow q$와 $q\longrightarrow p$는 각각 $\sim p\vee q$, $\sim q\vee p$와 서로 동치명제이다.
따라서 쌍조건문 $p\longleftrightarrow q$는 $(\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee p)$와 서로 동치명제이다.
그러므로 쌍조건문 $p\longleftrightarrow q$의 논리 회로를 기호로 나타내면 다음과 같다.

Ⅱ. 지수와 로그

1. 지수와 로그

지수와 로그에 들어가기 전에 / P. 33

1 (1) $2\times2\times2\times2\times2=2^5$

(2) $(-3)\times(-3)\times(-3)=(-3)^3$

(3) $a\times a\times a\times a=a^4$

2 (1) $2^5\times2^7\div2^2=2^{5+7-2}=2^{\boxed{10}}$

(2) $(3^5)^2\times3^3=3^{5\times2+3}=3^{\boxed{13}}$

(3) $\left(\frac{3}{5}\right)^3\times5^5=3^3\times5^{5-3}=3^{\boxed{3}}\times5^{\boxed{2}}$

(4) $1.5^4\div1.5^2=1.5^{4-2}=1.5^{\boxed{2}}$

(5) $5^3\div5^7=\frac{1}{5^{7-3}}=\frac{1}{5^{\boxed{4}}}$

3 (1) $x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$

(2) $7x^4-2x^2-5=(7x^2+5)(x^2-1)$

$=(7x^2+5)(x+1)(x-1)$

4 (1) $314=3.14\times10^2$

(2) $20110913=2.0110913\times10^7$

(3) $0.00271=2.71\times10^{-3}$

1. 지수

바탕 다지기 / P. 35

| 스스로 하기 |

1 (1) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, 3

2 (1) 2 (2) 6, $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$

1 (1) $\frac{1}{5^3}=5^{-3}$

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^2=3^{-2}$

(3) $\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$

2 (1) $(-3)^0=1$

(2) $2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

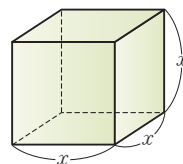
(3) $\left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^2\right\}^{-\frac{3}{2}}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$

$=\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{8}$

기본 익히기 / P. 36

1 (1) $\sqrt[3]{16}=16^{\frac{1}{3}}=(2^4)^{\frac{1}{3}}=2^{\boxed{\frac{4}{3}}}$

(2) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{2}}=(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=2^{\boxed{\frac{1}{6}}}$

2 한 모서리의 길이가 x인 정육면체의 부피는 x^3이다. 따라서 $x^3=a$이므로 $x=\sqrt[3]{a}$

3 1시간은 3600초이고, $3600=6^2\times10^2$이므로 속력이 3×10^8 m/s인 빛이 한 시간 동안 이동한 거리는

$3\times10^8\times6^2\times10^2=108\times10^{10}$

$=1.08\times10^{12}$ (m)

4 $\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^x\cdot a^x+a^{-x}\cdot a^x}{a^x\cdot a^x-a^{-x}\cdot a^x}$

$=\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}$

$=\frac{5+1}{5-1}$

$=\frac{3}{2}$

5 (1) $(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x+y)$

$=\{(x^{\frac{1}{4}})^2-(y^{\frac{1}{4}})^2\}(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x+y)$

$=(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x+y)$

$=\{(x^{\frac{1}{2}})^2-(y^{\frac{1}{2}})^2\}(x+y)$

$=(x-y)(x+y)$

$=x^2-y^2$

(2) $(x+y)=(x^{\frac{1}{3}})^3+(y^{\frac{1}{3}})^3$

$=(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})$

$\therefore (x+y)\div(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})=x^{\frac{2}{3}}-(xy)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$

(3) $\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=\{x\cdot(x\cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}$
$=\{x\cdot(x^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}$
$=(x\cdot x^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}$
$=(x^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{3}}$
$=x^{\frac{7}{12}}$

(4) $(x^{\sqrt{3}}\times y)^{\sqrt{3}}=x^{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\times y^{\sqrt{3}}$
$=x^{3}y^{\sqrt{3}}$

$\sqrt[3]{x}\times y^{-\sqrt{3}}=x^{\frac{1}{3}}y^{-\sqrt{3}}$

$\therefore (x^{\sqrt{3}}\times y)^{\sqrt{3}}\div(\sqrt[3]{x}\times y^{-\sqrt{3}})$
$=x^{3}y^{\sqrt{3}}\div x^{\frac{1}{3}}y^{-\sqrt{3}}$
$=x^{3-\frac{1}{3}}\times y^{\sqrt{3}+\sqrt{3}}$
$=x^{\frac{8}{3}}y^{2\sqrt{3}}$

실력 키우기 / P. 37

1 $10^{x}\times10^{y}=\frac{8}{5}\times\frac{125}{2}=4\times25=100$
$10^{x+y}=100=10^{2}$
$\therefore x+y=2$

2 $6\times10^{23}\times\frac{20}{12}=10^{24}$(개)

3 (1) $\{(\sqrt[n]{a})^{m}\}^{n}=(\sqrt[n]{a})^{mn}=\{(\sqrt[n]{a})^{n}\}^{m}=a^{m}$
$\therefore (\sqrt[n]{a})^{m}=\sqrt[n]{a^{m}}$
(2) $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn}=\{(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{m}\}^{n}=(\sqrt[n]{a})^{n}=a$
$\therefore \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

4 (1) $(3^{m}+3^{-m})^{2}=3^{2m}+3^{-2m}+2$
$=9^{m}+9^{-m}+2$
$=6+2=8$
$\therefore 3^{m}+3^{-m}=2\sqrt{2}\ (\because 3^{m}+3^{-m}>0)$

5 pH$=3.2$일 때, 수소 이온의 몰 수는 $10^{-3.2}$ M이고
pH$=7.2$일 때, 수소 이온의 몰 수는 $10^{-7.2}$ M이다.
$\therefore \frac{10^{-3.2}}{10^{-7.2}}=10^{-3.2-(-7.2)}=10^{4}$
따라서 pH$=3.2$인 용액 1 L 속에 들어 있는 수소 이온의 몰 수는 pH$=7.2$인 용액 1 L 속에 들어 있는 수소 이온의 몰 수의 10^{4}배이다.

읽기 자료 / P. 38

논술/수행평가 과제

감염된 각 파일에 있는 바이러스가 각각 10개의 파일을 감염시키므로
1일 후 바이러스에 감염된 파일의 개수는
$1+10=11$(개)
2일 후 바이러스에 감염된 파일의 개수는
$11+10\times11=11^{2}$(개)
3일 후 바이러스에 감염된 파일의 개수는
$11^{2}+10\times11^{2}=11^{3}$(개)
4일 후 바이러스에 감염된 파일의 개수는
$11^{3}+10\times11^{3}=11^{4}$(개)
따라서 4일 후 이 컴퓨터에는 11^{4}개의 감염된 파일이 존재하게 된다.

2. 로그

바탕 다지기 / P. 40

| 스스로 하기 |
1 3, 2, 2, $2a+b$
2 2, 2, $\log 10^{2}$, 2, 2, 2.3139

1 (1) $3^{4}=81$에서
$4=\log_{3}81$
(2) $10^{0}=1$에서
$0=\log_{10}1$
(3) $\log_{2}8=3$에서
$2^{3}=8$
(4) $\log_{10}\frac{1}{100}=-2$에서
$10^{-2}=\frac{1}{100}$

2 (1) $\log_{3}2=\frac{\log 2}{\log 3}$
(2) $\log_{5}\frac{1}{7}=\log_{5}7^{-1}$
$=-\log_{5}7$
$=-\frac{\log 7}{\log 5}$

(3) $\log_{\frac{1}{2}} 5=\log_{2^{-1}} 5$

$=-\log_2 5$

$=-\dfrac{\log 5}{\log 2}$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} 10=\log_{2^{-1}} 10$

$=-\log_2 10$

$=-\dfrac{\log 10}{\log 2}$

$=-\dfrac{1}{\log 2}$

기본 익히기 / P. 42

1 (1) $\dfrac{3}{2}\log_2 8+\log_2\sqrt{2}$

$=\dfrac{3}{2}\log_2 2^3+\log_2 2^{\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{3}{2}\times 3+\dfrac{1}{2}$

$=5$

(2) $\log_{100} 9=\dfrac{\log_{10} 9}{\log_{10} 100}=\dfrac{\log_{10} 3^2}{\log_{10} 10^2}$

$=\dfrac{2}{2}\log_{10} 3=\log_{10} 3$

$\therefore \log_{10} 75+\log_{10} 4-\log_{100} 9$

$=\log_{10}(75\times 4)-\log_{10} 3$

$=\log_{10}\dfrac{75\times 4}{3}$

$=\log_{10}(25\times 4)$

$=\log_{10} 100$

$=2$

2 $\log 36=\log(2^2\times 3^2)=2\log 2+2\log 3$

$\log 2=\log\dfrac{10}{5}=1-\log 5=1-b$

$\therefore \log 36=2\log 2+2\log 3$

$=2(1-b)+2a$

$=2a-2b+2$

3 이차방정식 $x^2-4x+2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_5 a+\log_5 b=4$

$\therefore \log_5 ab=\log_5 a+\log_5 b=4$

4 $1<x<10$이므로

$0<\log x<1$

$0<2\log x<2$ …… ㉠

$\log x$의 가수와 $\log\dfrac{1}{x}$의 가수가 같으므로

$\log x-\log\dfrac{1}{x}=\log x^2=2\log x$

는 정수이다.

따라서 ㉠으로부터

$2\log x=1$

$\log x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$

5 유리 다섯 장을 통과한 빛의 밝기를 l이라고 하면

$l=100\times 0.99^5$

$\log l=2+5\log 0.99$

$=2+5\log(9.90\times 10^{-1})$

$=2+5(0.9956-1)$

$=2+4.9780-5$

$=1.9780$

$=\log 95.06$

$\therefore l=95.06$

따라서 구하는 빛의 밝기는 95.06 lux이다.

실력 키우기 / P. 43

1 $\log_a c:\log_b c=2:1$이므로

$\log_a c=2\log_b c$

$\dfrac{1}{\log_c a}=\dfrac{2}{\log_c b}$

$\log_c b=2\log_c a$

$\therefore b=a^2$

$\therefore \log_a b+\log_b a=\log_a b+\dfrac{1}{\log_a b}$

$=\log_a a^2+\dfrac{1}{\log_a a^2}$

$=2+\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{5}{2}$

2 $a^3b^5=1$에서

$a^3=b^{-5},\ a=b^{-\frac{5}{3}}$

$\therefore \log_{ab} a^5 b = \log_{b^{-\frac{5}{3}}b} b^{-\frac{25}{3}} b$

$= \log_{b^{-\frac{2}{3}}} b^{-\frac{22}{3}}$

$= \dfrac{-\frac{22}{3}}{-\frac{2}{3}}$

$= 11$

3 $\log n = f(n) + g(n)$이므로

$f(100n) + g(100n) = \log 100n$

$= \log n + \log 10^2$

$= 2 + \log n$

$= \{2 + f(n)\} + g(n)$

$f\left(\frac{n}{10}\right) + g\left(\frac{n}{10}\right) = \log \frac{n}{10}$

$= \log n + \log 10^{-1}$

$= \log n - 1$

$= \{f(n) - 1\} + g(n)$

$\therefore f(100n) g\left(\frac{n}{10}\right)$

$= \{2 + f(n)\} g(n)$

$= f(n) g(n) + 2g(n)$

4 $\log 3^{45} = 45 \log 3$

$= 45 \times 0.4771$

$= 21.4695$

이므로 3^{45}은 22자리 수이다.

한편 3^{45}의 가수는 0.4695이고, $\log x = 0.4695$라고 하면

$\log 2 = 0.3010 < 0.4695 < 0.4771 = \log 3$

이므로

$2 < x < 3$

$\therefore x = 2.\times\times\times$

$\log x$와 $\log 3^{45}$의 가수가 같으므로 3^{45}의 최고 자리의 숫자는 2이다.

5 2등성의 별의 밝기와 4등성의 별의 밝기를 각각 I_2, I_4라고 하면

$2 = -\frac{5}{2} \log I_2 + C$ ······ ㉠

$4 = -\frac{5}{2} \log I_4 + C$ ······ ㉡

㉠－㉡을 하면

$-2 = -\frac{5}{2}(\log I_2 - \log I_4)$

$2 = \frac{5}{2} \log \frac{I_2}{I_4}$

$\frac{4}{5} = \log \frac{I_2}{I_4}$

$\therefore \frac{I_2}{I_4} = 10^{\frac{4}{5}}$

따라서 2등성인 별의 밝기는 4등성인 별의 밝기의 $10^{\frac{4}{5}}$배이다.

실생활 문제 해결하기 / P. 44

1단계 (1)

	1년 후	5년 후	10년 후	15년 후	20년 후
A.com	α배	5배	25배	125배	625배
B.com	β배	$\sqrt{10}$배	10배	$10\sqrt{10}$배	100배

(2) 전년 대비 성장 비

2단계 두 회사 A.com, B.com의 올해 매출액을 각각 a, b라고 하면

$5a = a \times \alpha^5$, $\sqrt{10} b = b \times \beta^5$

3단계 (1) $5a = a \times \alpha^5$에서

$5 = \alpha^5$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 5 = 5 \log \alpha$

$\therefore \log \alpha = \frac{\log 5}{5} = \frac{1 - \log 2}{5}$

$= \frac{1 - 0.3010}{5} = \frac{0.6990}{5}$

$= 0.1398$

$\sqrt{10} b = b \times \beta^5$에서

$\sqrt{10} = \beta^5$

양변에 상용로그를 취하면

$\log \sqrt{10} = 5 \log \beta$

$\frac{1}{2} = 5 \log \beta$

$\therefore \log \beta = \dfrac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{10} = 0.1$

(2) $\log 1.38 = 0.1398$이므로

$\alpha = 1.38$

$\log 1.26 = 0.1$이므로

$\beta = 1.26$

4단계 $\alpha^5=1.38^5 \fallingdotseq 5.0049$

$\beta^{10}=1.26^{10} \fallingdotseq 10.0857$

따라서 A.com은 매년 전년도 매출액의 1.38배, B.com은 1.26배를 성장시킬 계획을 세웠음을 알 수 있다.

2. 지수함수와 로그함수

지수함수와 로그함수에 들어가기 전에 / P. 46

1 (1) 정의역: $\{x \mid x \neq 1$인 실수$\}$

치역: $\{y \mid y \neq 0$인 실수$\}$

(2) 정의역: $\{x \mid x \geq -2\}$

치역: $\{y \mid y \geq 0\}$

2 (1) $5^{-3} \times (5^3)^2 = 5^{-3+3\times2} = 5^3$

(2) $7^{2\sqrt{3}} \div 7^{\sqrt{3}} = 7^{2\sqrt{3}-\sqrt{3}} = 7^{\sqrt{3}}$

(3) $21^5 \div 3^5 = (3\times7)^5 \div 3^5 = 3^{5-5} \times 7^5 = 7^5$

3 (1) $20^0=1$에서 $0=\log_{20}1$

(2) $3^2=9$에서 $2=\log_3 9$

(3) $0.1^2=0.01$에서 $2=\log_{0.1}0.01$

(4) $2^{-3}=\frac{1}{8}$에서 $-3=\log_2 \frac{1}{8}$

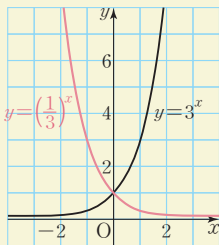
4 (1) $\log 3+\log 5=\log(3\times5)=\log 15$

(2) $3\log 2-\log 8=\log 8-\log 8=0$

1. 지수함수와 그 그래프

바탕 다지기 / P. 48

| 스스로 하기 |

1 $-x$, y

1 (1) 증가

(2) 1, 5

(3) x

2 (1) 함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

지수를 비교하면 $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$이므로

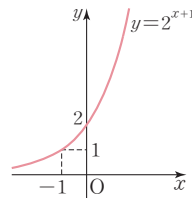
$2^{\frac{1}{3}}>2^{\frac{1}{4}}$

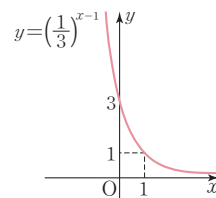
(2) 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

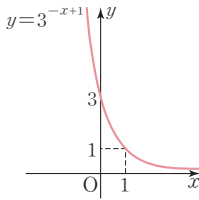
지수를 비교하면 $2<3$이므로

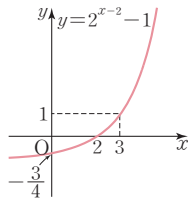
$\left(\frac{1}{4}\right)^2>\left(\frac{1}{4}\right)^3$

기본 익히기 / P. 49

1 (1) 함수 $y=2^{x+1}$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

치역: $\{y \mid y>0\}$

(2) 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

치역: $\{y \mid y>0\}$

(3) $y=3^{-x+1}=3^{-(x-1)}$이고, 함수 $y=3^{-(x-1)}$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

치역: $\{y|y>0\}$

(4) 함수 $y=2^{x-2}-1$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

치역: $\{y|y>-1\}$

2 (1) $\sqrt[3]{9}=9^{\frac{1}{3}}=(3^2)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt[4]{27}=27^{\frac{1}{4}}=(3^3)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}}$

$\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$

밑 3은 1보다 크고, 지수를 비교하면

$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$이므로 $\quad 3^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{3}{4}}$

$\therefore \sqrt{3}<\sqrt[3]{9}<\sqrt[4]{27}$

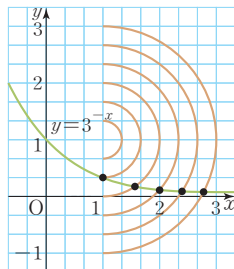
(2) $\sqrt[3]{0.1}=0.1^{\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}=\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2}}=0.1^{\frac{1}{2}}$,

$\sqrt[5]{\frac{1}{100}}=\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{2}{5}}=0.1^{\frac{2}{5}}$

밑 0.1은 1보다 작고, 지수를 비교하면

$\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}$이므로 $\quad 0.1^{\frac{1}{3}}>0.1^{\frac{2}{5}}>0.1^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{10}}<\sqrt[5]{\frac{1}{100}}<\sqrt[3]{0.1}$

3 $y=3^{-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(0,\ 1)$, $\left(1,\ \frac{1}{3}\right)$을 지나므로 교점의 개수는 5개이다.

4 1년 후 재활용되는 병의 개수는

$N(1)=10^8\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^1=9\times10^7$

$=90000000$(개)

2년 후 재활용되는 병의 개수는

$N(2)=10^8\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2=81\times10^6$

$=81000000$(개)

3년 후 재활용되는 병의 개수는

$N(3)=10^8\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^3=729\times10^5$

$=72900000$(개)

실력 키우기 / P. 50

1 $\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{8}=2^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{25}=5^{\frac{1}{2}}$

$\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$이므로

$2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{3}{4}}$ $\quad$ …… ㉠

$3<5$이므로

$3^{\frac{1}{2}}<5^{\frac{1}{2}}$ $\quad$ …… ㉡

$2^{\frac{3}{4}}=8^{\frac{1}{4}}$, $3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{2}{4}}=9^{\frac{1}{4}}$이므로

$8^{\frac{1}{4}}<9^{\frac{1}{4}}$

$\therefore 2^{\frac{3}{4}}<3^{\frac{1}{2}}$ $\quad$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢으로부터

$2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{3}{4}}<3^{\frac{1}{2}}<5^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \sqrt[4]{25}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[3]{4}$

2 (1) 지수함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서

$x=2$일 때, 최댓값은 $\quad 2^{2-1}-1=1$

$x=-1$일 때, 최솟값은 $\quad 2^{-1-1}-1=-\frac{3}{4}$

(2) $3^{-x}=X$로 놓으면 $-2\le x\le 0$에서 $\quad 1\le X\le 9$

$y=X^2-4X-1$

$=(X-2)^2-5$

따라서

$X=9$일 때, 최댓값은 $\quad (9-2)^2-5=44$

$X=2$일 때, 최솟값은 $\quad (2-2)^2-5=-5$

3 점 P의 x좌표를 a라고 하면 $\quad k\cdot 3^{a}=3^{-a}$

$k3^{2a}=1$

$\therefore 3^{2a}=\frac{1}{k}$ $\cdots\cdots$ ㉠

점 Q의 x좌표는 $2a$이므로

$k\cdot 3^{2a}=-4\cdot 3^{2a}+8$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$k\cdot\frac{1}{k}=-4\cdot\frac{1}{k}+8$

$k=-4+8k$

$7k=4$

$\therefore k=\frac{4}{7}$

4 ㄱ. $f(x)-f(y)=a^{x}-a^{y}$

$f(x-y)=a^{x-y}$

$\therefore f(x)-f(y)\neq f(x-y)$

ㄴ. $f(x)f(y)=a^{x}\cdot a^{y}=a^{x+y}=f(x+y)$

ㄷ. $\{f(x)\}^{y}=\{a^{x}\}^{y}=a^{xy}$

$f(xy)=a^{xy}$

$\therefore \{f(x)\}^{y}=f(xy)$

ㄹ. $f(x)\div f(y)=a^{x}\div a^{y}=a^{x-y}$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=a^{\frac{x}{y}}$

$\therefore f(x)\div f(y)\neq f\left(\frac{x}{y}\right)$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

5 함수 $y=2^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 c만큼 평행 이동한 후 x축에 대하여 대칭이동하면 함수 $y=-2^{x-c}$의 그래프가 된다.

이 식이 $f(x)=-\left(\frac{1}{2}\right)^{ax+b}=-2^{-ax-b}$과 같으므로

$a=-1,\ b=c$

한편 함수 $y=-2^{x-c}$의 그래프는 점 $(5,\ -1)$을 지나므로

$-1=-2^{5-c},\ 2^{5-c}=1$

$5-c=\log_{2}1,\ 5-c=0$

$\therefore c=5$

$\therefore a=-1,\ b=5,\ c=5$

실생활 문제 해결하기 / P. 52

1단계 (1) 겹쳐 놓은 종이의 두께가 지구와 달 사이의 거리보다 두꺼워지는 시점

(2) 지구와 달 사이의 거리: 380000 km

종이 한 장의 두께: 0.1 mm

2단계 (1) $d=0.1\times 2^{n}$

(2) $3.8\times 10^{5}(\text{km})=3.8\times 10^{11}(\text{mm})$이므로

$0.1\times 2^{n}\geq 3.8\times 10^{11}$에서 $\quad 2^{n}\geq 3.8\times 10^{12}$

$2^{41}=2.2\times 10^{12},\ 2^{42}=4.4\times 10^{12}$이므로

$2^{41}<3.8\times 10^{12}<2^{42}$이다.

따라서 $n=42$, 즉 42번 반복할 때, 처음으로 종이의 두께가 지구와 달 사이의 거리보다 두꺼워진다.

3단계 $n=42$일 때 겹쳐 놓은 종이의 두께 d는

$d=0.1\times 2^{42}=0.1\times 4.4\times 10^{12}=4.4\times 10^{11}$

$4.4\times 10^{11}(\text{mm})=4.4\times 10^{5}(\text{km})$

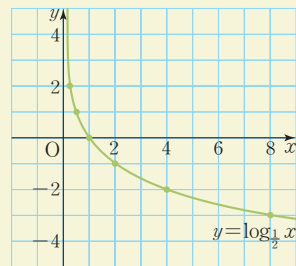
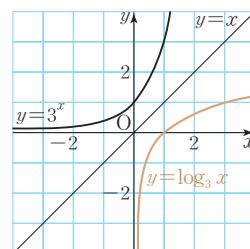
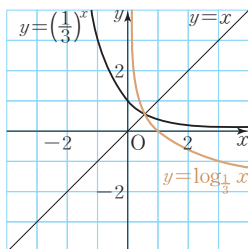
$=440000(\text{km})$

이므로 380000 km보다 두껍다.

2. 로그함수와 그 그래프

바탕 다지기 / P. 54

| 스스로 하기 |

1 1, -1, -3

1 (1) 역함수: $y=\log_{3}x$

(2) 역함수: $y=\log_{\frac{1}{3}} x$

2 로그함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

(1) $7<9$이므로

$\log_2 7<\log_2 9$

(2) $\frac{1}{3}>\frac{1}{5}$이므로

$\log_2 \frac{1}{3}>\log_2 \frac{1}{5}$

프로젝트 / P. 55

1단계

x	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	1000	10000
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

2단계 $x_1=10$일 때 $y_1=1$, $x_2=1000$일 때 $y_2=3$

$x_1\times x_2=10000$일 때 $y=4=y_1+y_2$

3단계 $x_1=10$일 때 $y_1=1$, $x_3=10000$일 때 $y_3=4$

$x_1\div x_3=\frac{1}{1000}$일 때 $y=-3=y_1-y_3$

4단계 $y_1=1$일 때 $x_1=10$, $y_2=3$일 때 $x_2=1000$

$y_3=4$일 때 $x_3=10000$

$y_1+y_2=4$일 때 $x=10000=x_1\times x_2$

$y_1-y_3=-3$일 때 $x=\frac{1}{1000}=x_1\div x_3$

논술/수행평가 과제

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

기본 익히기 / P. 56

1 로그함수 $y=\log_5 x$의 그래프의 점근선은 y축이다.

$y=\log_{\frac{1}{5}} x=-\log_5 x$이므로 $y=\log_5 x$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

따라서 옳은 것을 모두 고르면 ㄱ, ㄷ이다.

2 (1) $\log_4 6=\log_{2^2} 6=\frac{1}{2}\log_2 6=\log_2\sqrt{6}$이고,

$3>\sqrt{6}$이므로

$\log_2 3>\log_2\sqrt{6}$

$\therefore \log_2 3>\log_4 6$

(2) $\frac{\log 3}{3}=\frac{2\log 3}{6}=\frac{\log 9}{6}$

$\frac{\log 4}{4}=\frac{2\log 2}{4}=\frac{\log 2}{2}$

$=\frac{3\log 2}{6}=\frac{\log 8}{6}$

이때, $9>8$이므로 $\frac{\log 9}{6}>\frac{\log 8}{6}$

$\therefore \frac{\log 3}{3}>\frac{\log 4}{4}$

3 ㄱ. $y=\log_4 x^2=\frac{2}{2}\log_2|x|$

$=\log_2|x|$

ㄴ. $y=\log_2\frac{1}{x}=-\log_2 x$

ㄷ. $y=\log_{\frac{1}{2}} x=\log_{2^{-1}} x=-\log_2 x$

ㄹ. $y=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}=\log_{2^{-1}} x^{-1}$

$=\frac{-1}{-1}\log_2 x=\log_2 x$

따라서 로그함수 $y=\log_2 x$와 그 그래프가 일치하는 것은 ㄹ이다.

4 $b=\log_2 a$

$c=\log_2 8a=\log_2 8+\log_2 a=3+b$

$\therefore c-b=(3+b)-b=3$

실력 키우기 / P. 57

1 $\frac{3}{2}=\log_4 8$, $\log_2 0.6=\log_2\frac{3}{5}=\log_4\frac{9}{25}$,

$\log_5 4=\frac{1}{\log_4 5}$

이때, $\frac{9}{25}<5<8$이므로

$\log_4\frac{9}{25}<\log_4 5<\log_4 8$

한편 $\log_4 5>\log_5 4>0$이고,

$\log_2 0.6<0$이므로

$\log_2 0.6<\log_5 4<\log_4 5<\frac{3}{2}$

$\therefore \frac{3}{2}$, $\log_4 5$, $\log_5 4$, $\log_2 0.6$

2 $\log_a b=0.5$, $\log_a f=2.5$이므로
$\log_a bf=\log_a b+\log_a f=3$
$\therefore bf=a^3$
(1) $\log_a cd=\log_a c+\log_a d=1+1.5=2.5$
$\therefore cd=a^{2.5}$
(2) $\log_a ce=\log_a c+\log_a e=1+2=3$
$\therefore ce=a^3$
(3) $\log_a cf=\log_a c+\log_a f=1+2.5=3.5$
$\therefore cf=a^{3.5}$
(4) $\log_a de=\log_a d+\log_a e=1.5+2=3.5$
$\therefore de=a^{3.5}$
따라서 bf의 값과 같은 것은 (2) ce이다.

3 로그함수 $y=\log_a x+m$과 그 역함수의 그래프의 교점은 직선 $y=x$와 $y=\log_a x+m$의 그래프의 교점과 같으므로
$1=\log_a 1+m$에서
$m=1$
$3=\log_a 3+1$에서
$2=\log_a 3$
$a^2=3 \quad \therefore a=\sqrt{3}\ (\because a>0)$
$\therefore a+m=\sqrt{3}+1$

4 산성도가 5.5일 때의 수소 이온의 농도를 x_1, 산성도가 7일 때의 수소 이온의 농도를 x_2라고 하면
$5.5=\log\frac{1}{x_1}$에서
$5.5=-\log x_1$
$\therefore \log x_1=-5.5$
$7=\log\frac{1}{x_2}$에서
$7=-\log x_2$
$\therefore \log x_2=-7$

$$\log\frac{x_1}{x_2}=\log x_1-\log x_2=-5.5-(-7)=1.5$$

따라서 $\frac{x_1}{x_2}=10^{1.5}$이므로 산성도가 5.5인 빗물의 수소 이온 농도는 산성도가 7인 빗물의 수소 이온 농도의 $10^{1.5}$배이다.

대단원 확인하기 P. 58, 59

1 (1) (주어진 식)$=a^{-3\times2+(-2)\times(-4)-(-6)-4}$
$=a^{-6+8+6-4}$
$=a^4$
(2) (주어진 식)$=a^{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=a$

2
$$\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{10}}}=\{10(10\cdot10^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}=(10\cdot10^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}}=(10^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}}=10^{\frac{7}{8}}$$
$$\therefore \log_5\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{10}}}=\log_5 10^{\frac{7}{8}}=\frac{7}{8}\log_5(5\times2)=\frac{7}{8}(\log_5 5+\log_5 2)=\frac{7}{8}\left(1+\frac{1}{a}\right)$$

3 (1) (주어진 식)$=\log_{\frac{1}{3}}5^3+\log_{\frac{1}{3}}4^2-\log_{\frac{1}{3}}2^3$
$=\log_{\frac{1}{3}}\frac{5^3\times4^2}{2^3}$
$=\log_{\frac{1}{3}}(5^3\times2)$
$=-\log_3 250$
(2) $\log_3 5-\log_9\frac{1}{5}=\log_9 5^2-\log_9\frac{1}{5}$
$=\log_9 5^3$
$=\frac{3}{2}\log_3 5$
$\log_5\frac{3}{2}+\log_5 2=\log_5 3$
$\therefore \left(\log_3 5-\log_9\frac{1}{5}\right)\left(\log_5\frac{3}{2}+\log_5 2\right)$
$=\frac{3}{2}\log_3 5\times\log_5 3$
$=\frac{3}{2}$

4 $a=10^x$에서 $\quad \log a=x$
$b=10^y$에서 $\quad \log b=y$
$\therefore \log_{\sqrt{a}}b^2=\log_{a^{\frac{1}{2}}}b^2=4\log_a b$
$=\frac{4\log b}{\log a}=\frac{4y}{x}$

5 $5.16=10^{\frac{1}{x}}$, $0.00516=10^{\frac{1}{y}}$이므로

$\frac{1}{x}=\log 5.16$, $\frac{1}{y}=\log 0.00516$

$\therefore \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\log 5.16-\log 0.00516$

$=\log \frac{5.16}{0.00516}$

$=\log 10^3=3$

6 (1) $\log 5160^3=3\log 5160$

$=3(\log 5.16+\log 10^3)$

$=3(0.7126+3)$

$=11.1378=11+0.1378$

지표: 11, 가수: 0.1378

(2) $\log\sqrt{0.00516}=\frac{1}{2}\log 0.00516$

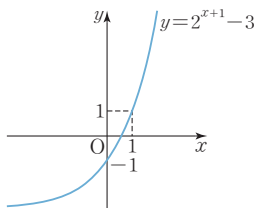
$=\frac{1}{2}(\log 5.16+\log 10^{-3})$

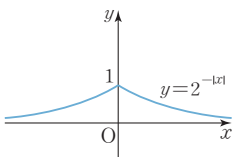
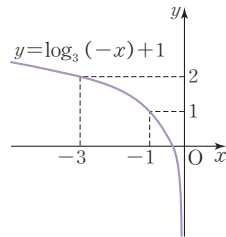
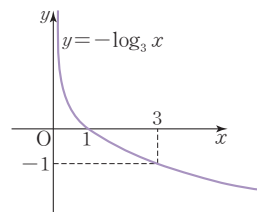
$=\frac{1}{2}(0.7126-3)$

$=-1.1437$

$=-2+0.8563$

지표: -2, 가수: 0.8563

7 (1) $y=2^{x+1}-3$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 다음과 같다.

(2) $y=2^{-|x|}=\begin{cases} 2^{-x} & (x\geq 0) \\ 2^x & (x<0) \end{cases}$

이므로 그래프는 다음과 같다.

8 (1) $y=\log_3(-x)+1$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 다음과 같다.

(2) $y=-\log_3 x$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 그래프는 다음과 같다.

9 상용로그의 지표가 m인 자연수를 A라고 하면

$m\leq \log A<m+1$

$10^m\leq A<10^{m+1}$

$\therefore x=10^{m+1}-10^m=10^m(10-1)$

$=9\cdot 10^m$ ······ ㉠

역수의 상용로그의 지표가 $-n$인 자연수를 B라고 하면

$-n\leq \log \frac{1}{B}<-n+1$

$n\geq \log B>n-1$, $10^n\geq B>10^{n-1}$

$\therefore y=10^n-10^{n-1}=10^{n-1}(10-1)$

$=9\cdot 10^{n-1}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$\log x-\log y=\log \frac{x}{y}$

$=\log 10^{m-(n-1)}$

$=m-n+1$

10 (1) $f_6=f_1\cdot(\sqrt[12]{2})^{6-1}$에서

$\frac{f_6}{f_1}=2^{\frac{5}{12}}$

따라서 f_6의 진동수는 f_1의 진동수의 $2^{\frac{5}{12}}$배이다.

(2) $f_{13}=f_1\cdot(\sqrt[12]{2})^{13-1}$에서

$\frac{f_{13}}{f_1}=2$

따라서 f_{13}의 진동수는 f_1의 진동수의 2배이다.

Ⅲ. 수열

1. 등차수열과 등비수열

등차수열과 등비수열에 들어가기 전에 / P. 63

1 (1) $3\times1,\ 3\times2,\ 3\times3,\ \cdots,\ 3\times16$ ∴ 16개

(2) $5\times1,\ 5\times2,\ 5\times3,\ \cdots,\ 5\times10$ ∴ 10개

(3) 3과 5는 서로소이므로 3과 5의 공배수는 15의 배수이고 15, 30, 45가 있다. ∴ 3개

2 (1) $x(x+1)+2x=x(x+3)$

(2) $x(x+1)(2x+1)-x(x+1)$
$=x(x+1)(2x+1-1)$
$=2x^2(x+1)$

(3) $(x+1)^3-(x^3+1)$
$=(x+1)^3-(x+1)(x^2-x+1)$
$=(x+1)\{(x+1)^2-(x^2-x+1)\}$
$=3x(x+1)$

3 $(a+b)x+a-2b+3=0$이 x에 대한 항등식이어야 하므로

$\begin{cases} a+b=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ a-2b+3=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=1$

4 (1) $x=-1$

(2) $x=5$

5 $\begin{cases} x+2y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+7y=-5 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡−㉠에서

$5y=-10$이므로 $y=-2$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=9$

∴ $x=9,\ y=-2$

1. 등차수열

바탕 다지기 / P. 65

| 스스로 하기 |

1 (1) $-6,\ 23$

(2) $27,\ 3,\ 3,\ 3,\ 2$

1 (1) $a_5=5^2-5$
$=25-5$
$=20$

$a_{10}=10^2-10$
$=100-10$
$=90$

(2) $a_5=1-(-2)^5$
$=1+32$
$=33$

$a_{10}=1-(-2)^{10}$
$=1-1024$
$=-1023$

2 ㉠: 첫째항이 3, 공차가 6인 등차수열을 이룬다.

㉡: 첫째항이 6, 공차가 8인 등차수열을 이룬다.

3 (1) 첫째항이 2, 공차가 3이므로 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{10}{2}\{2\times2+(10-1)\times3\}$

$=155$

(2) 첫째항이 2, 공차가 $-\frac{1}{2}$이므로 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{10}{2}\left\{2\times2+(10-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$=-\frac{5}{2}$

기본 익히기 / P. 66

1 (1) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_5=-29,\ a_{25}=51$인 등차수열이므로

$a+4d=-29$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a+24d=51$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$a=-45,\ d=4$

∴ $a_n=-45+(n-1)\times4=4n-49$

(2) 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=-3,\ a_9=27$인 등차수열이므로

$a+2d=-3$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a+8d=27$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$a=-13,\ d=5$

∴ $a_n=-13+(n-1)\times5=5n-18$

2 $\{a_n\}$: 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, ⋯

$\{b_n\}$: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, ⋯

이므로 구하는 수열 $\{c_n\}$은

$\{c_n\}$: 5, 11, 17, 23, ⋯

즉, 첫째항이 5, 공차가 6인 등차수열이다.

따라서 수열 $\{c_n\}$의 일반항은

$c_n=5+(n-1)\times 6=6n-1$

3 $100^2-99^2+98^2-97^2+\cdots+2^2-1^2$

$=(100+99)(100-99)+(98+97)(98-97)$
$\quad+\cdots+(2+1)(2-1)$

$=100+99+98+\cdots+2+1$

$=\dfrac{100}{2}(100+1)$

$=5050$

4 두 자리 자연수 중에서 3의 배수는

$12=3\times 4$

$15=3\times 5$

$18=3\times 6$

⋮

$99=3\times 33$

따라서 3의 배수의 개수는

$33-4+1=30$(개)

이고, 이들의 합은

$\dfrac{30}{2}(12+99)=1665$

5 $\begin{cases} c+31=2d \\ a+23=2d \end{cases}$에서 $\quad c+31=a+23$

$\therefore a-c=8$

$\begin{cases} e+f=2\times 23=46 \\ b+f=2\times 31=62 \end{cases}$에서 $\quad b-e=62-46=16$

$\therefore (a-c)+(b-e)=8+16=24$

실력 키우기 / P. 67

1 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_3=a+2d=11$에서

$a=11-2d$

$a_6=a+5d=11+3d$

$a_{10}=a+9d=11+7d$

$\therefore (11+3d):(11+7d)=5:8$

$55+35d=88+24d$에서

$11d=33,\ d=3$

$\therefore a=11-2\times 3=5$

$\therefore a_{20}=5+19\times 3=62$

2 첫째항부터 제47항까지의 항 중에서 홀수 번째 항의 수는 24개이므로

$\dfrac{240}{24}=10$

주어진 등차수열의 첫째항부터 제47항까지의 평균은 10이다.

따라서 구하는 합은

$10\times 47=470$

| **참고** |

$\dfrac{a_1+a_{47}}{2}=\dfrac{a_2+a_{46}}{2}=\cdots=\dfrac{a_{23}+a_{25}}{2}=a_{24}=10$

3 제1권의 발행 연도를 a, 공차를 d라고 하면 각 권의 발행 연도는 제1권부터 차례로

$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, a+6d$

9년 간격으로 발행되므로 $\quad d=9$

$7a+21d=7a+21\cdot 9=13811$

$7a=13622 \quad \therefore a=1946$

따라서 제5권의 발행 연도는

$a+4d=1946+4\cdot 9=1982$(년)

4 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하면

$\dfrac{n\{2\times 50+(n-1)\times(-4)\}}{2}$

$=-2n^2+52n=-2(n-13)^2+338$

따라서 제13항까지의 합이 최대가 되고, 그 최댓값은 338이다.

| **참고** |

$a_n=50+(n-1)\times(-4)=-4n+54<0$에서

$n>13.5$

즉, 제14항부터 음수가 나오므로 제13항까지의 합이 최대임을 알 수 있다.

5 $a_1=200+\dfrac{200}{\pi}\times\pi=400\ (\mathrm{m})$

$a_2=200+\left(\dfrac{200}{\pi}+2.5\right)\pi=400+\dfrac{5}{2}\pi\ (\mathrm{m})$

$a_3=200+\left(\dfrac{200}{\pi}+5.0\right)\pi=400+5\pi\ (\mathrm{m})$

⋮

각 레인의 길이 $\{a_i\}$는 등차수열을 이루므로

$a_i=400+(i-1)\dfrac{5}{2}\pi\ \ (i=1, 2, 3, \cdots, 8)$

$\therefore a_8=400+\dfrac{35}{2}\pi\ (\mathrm{m})$

2. 등비수열

바탕 다지기 / P. 70

| 스스로 하기 |

1 (1) 10, 10

(2) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{8}{3}$

1 (1) 첫째항이 -1, 공비가 -2이므로

$a_n=-1\cdot(-2)^{n-1}=-(-2)^{n-1}$

(2) 첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{2}$이므로

$a_n=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$

2 (1) 구하는 등비수열의 합은

$\frac{2(4^8-1)}{4-1}=\frac{2}{3}(4^8-1)$

(2) 구하는 등비수열의 합은

$1+3+3^2+\cdots+3^{20}$

$=\frac{3^{21}-1}{3-1}$

$=\frac{1}{2}(3^{21}-1)$

기본 익히기 / P. 71

1 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$\begin{cases} ar=-6 & \cdots\cdots ㉠ \\ ar^4=48 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $r=-2$

$\therefore \frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{3\{(-2)^n-1\}}{-2-1}=1-(-2)^n$

2 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의 일반항을 a_n이라고 하면 $a_n=2^{n-1}$

여기서 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$2^{n-1}>1000$

을 만족하는 n의 최솟값은 11이다.

따라서 제11항부터 1000보다 크게 된다.

3 (1) 첫째항을 a, 공비를 r $(r>0)$라고 하면

$a_1+a_2=a+ar=1$에서

$a(1+r)=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_3+a_4=ar^2+ar^3=3$에서

$ar^2(1+r)=3$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=3$

$\therefore r=\sqrt{3}$ $(\because r>0)$

$\therefore a_5+a_6=ar^4+ar^5=ar^4(1+r)$

$=a(1+r)\cdot r^4=1\cdot 9=9$

(2) 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$a_1+a_2+a_3=1$에서

$a(1+r+r^2)=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_4+a_5+a_6=8$에서

$ar^3(1+r+r^2)=8$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=8$

$\therefore r=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{1}{7}$

$\therefore a_1+a_3+a_5=a(1+r^2+r^4)$

$=\frac{1}{7}(1+2^2+2^4)$

$=3$

4 4, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=4b$, $b=\frac{a^2}{4}$ $\cdots\cdots$ ㉠

a, b, 24가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+24$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$a^2-2a-48=0$

$(a-8)(a+6)=0$

$\therefore a=8$ $(\because a>0)$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=16$

5 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

첫째항부터 제4항까지의 합은

$\frac{a(1-r^4)}{1-r}=2$ $\cdots\cdots$ ㉠

첫째항부터 제8항까지의 합은

$\frac{a(1-r^8)}{1-r}=8$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$1+r^4=4$

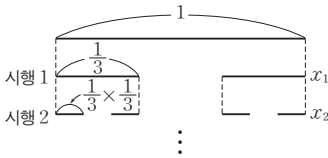
$\therefore r^4=3$

따라서 첫째항부터 제12항까지의 합은

$\frac{a(1-r^{12})}{1-r}=\frac{a(1-r^4)}{1-r}(1+r^4+r^8)$

$=2\times(1+3+3^2)$

$=26$

6

n 번째 시행 후 남은 선분의 길이의 합을 x_n이라고 하면

$x_1=\frac{1}{3}\times 2=\frac{2}{3}$

$x_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 4=\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$x_3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 8=\left(\frac{2}{3}\right)^3$

⋮

따라서 20번째 시행 후 남은 선분의 길이의 합은

$x_{20}=\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$

프로젝트 / P. 72, 73

1단계 (1) $A=\frac{a+b}{2}$, $G=\sqrt{ab}$

(2) 1과 2의 등차중항은 $\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$

1과 2의 등비중항은 $\sqrt{2}$

$\frac{3}{2}>\sqrt{2}$이므로 1과 2의 등차중항이 등비중항보다 크다.

2단계 (1) $\overline{E_1F_1}=\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}=\frac{a+b}{2}$

(2) $\square AE_2F_2D \backsim \square E_2BCF_2$이므로

$\overline{AD}:\overline{E_2F_2}=\overline{E_2F_2}:\overline{BC}$

$\overline{E_2F_2}^2=\overline{AD}\cdot\overline{BC}=ab$

$\therefore \overline{E_2F_2}=\sqrt{ab}$

3단계 길이를 재어 보면 $\overline{E_1F_1}>\overline{E_2F_2}$이므로 주어진 부등식은 성립한다.

논술/수행평가 과제

1 $a=b$이면 주어진 사각형이 직사각형이므로 $\overline{E_1F_1}=\overline{E_2F_2}$이다.

따라서 $a=b$일 때 두 양수 a, b의 등차중항과 등비중항은 같다.

2 두 양수 a, b에 대하여

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

실력 키우기 / P. 74

1 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=2\cdot 3^{n-1}$

(1) 수열 $\{a_n^2\}$은 일반항이

$a_n^2=(2\cdot 3^{n-1})^2$

$=2^2\cdot(3^2)^{n-1}=4\cdot 9^{n-1}$

이므로 첫째항이 4이고 공비가 9인 등비수열이다.

(2) 수열 $\{\log a_n\}$은 일반항이

$\log a_n=\log(2\cdot 3^{n-1})$

$=\log 2+\log 3^{n-1}$

$=\log 2+(n-1)\log 3$

이므로 첫째항이 $\log 2$이고 공차가 $\log 3$인 등차수열이다.

2 $a_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})$

$=(3^{n+1}-3)-(3^n-3)$

$=2\cdot 3^n\ (n\geq 2)$

한편 $a_1=S_1=3^{1+1}-3=6$이므로 위의 식은 $n=1$일 때에도 성립한다.

$\therefore a_n=2\cdot 3^n$

$a_{2n-1}=2\cdot 3^{2n-1}=6\cdot 3^{2(n-1)}=6\cdot 9^{n-1}$

따라서 구하는 값은 첫째항이 6, 공비가 9인 등비수열의 첫째항부터 제50항까지의 합이다.

$\therefore a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}$

$=\frac{6(9^{50}-1)}{9-1}=\frac{3}{4}(9^{50}-1)$

3 첫째항부터 제n항까지의 합은

$\frac{a(1-r^n)}{1-r}=20$ …… ㉠

첫째항부터 제$2n$항까지의 합은

$\frac{a(1-r^{2n})}{1-r}=30$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $20(1+r^n)=30$

$1+r^n=\frac{3}{2}$ $\therefore r^n=\frac{1}{2}$

따라서 첫째항부터 제$3n$항까지의 합은

$\frac{a(1-r^{3n})}{1-r}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}(1+r^n+r^{2n})$

$=20\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=35$

4 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$이므로 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\left|2-\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right|<0.01$$

$\therefore 2^{n-1}>100$

한편 $2^6=64$, $2^7=128$이므로 $\quad n-1\geq 7$

$\therefore n\geq 8$

따라서 구하는 항은 제8항이다.

5 10개의 세포를 n회 배양했을 때, 세포의 개수를 a_n이라고 하면

$a_1=10\times(1-0.1)\times 10=90$

$a_{n+1}=a_n\times(1-0.1)\times 10=9a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 90이고, 공비가 9인 등비수열이므로

$a_n=90\cdot 9^{n-1}=10\cdot 9^n$

$\therefore a_{10}=10\cdot 9^{10}$(개)

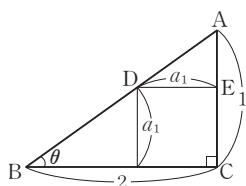
개념 넓히기 / P. 75

확인학습

1 오른쪽 그림에서 △ADE∽△ABC이므로

$a_1 : 2=(1-a_1) : 1$

$a_1=2(1-a_1)$

$\therefore a_1=\frac{2}{3}$

a_n과 a_{n+1}사이에는 다음의 관계식이 성립한다.

$$\tan\theta=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}$$

$$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{1+\tan\theta}a_n$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}a_n=\frac{2}{3}a_n$$

따라서 주어진 수열의 일반항은

$$a_n=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\therefore a_{10}=\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

2. 수열의 합

수열의 합에 들어가기 전에 / P. 77

1 (1) $(2x+1)^2=4x^2+4x+1$

따라서 x^2의 계수는 4, x의 계수는 4이다.

(2) $(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$

따라서 x^2의 계수는 6, x의 계수는 12이다.

(3) $(2x+1)^3=8x^3+12x^2+6x+1$

따라서 x^2의 계수는 12, x의 계수는 6이다.

2 (1) $\left(\frac{2}{5}\right)^2\times 5^2\div 2$

$=\frac{2^2}{5^2}\times 5^2\times\frac{1}{2}=2$

(2) $3^5\times(3^3)^2\div 3^4$

$=3^5\times 3^6\div 3^4$

$=3^{5+6-4}=3^7$

3 (1) 2, 4, 6, 8, $\cdots$, 20은 첫째항이 2, 끝항이 20, 항의 수가 10개인 등차수열이므로

$2+4+6+8+\cdots+20$

$=\frac{10}{2}(2+20)=110$

(2) 1, 4, 7, 10, $\cdots$, 28은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이고

$28=1+(n-1)\times 3 \qquad \therefore n=10$

즉, 항의 수가 10개이므로

$1+4+7+10+\cdots+28=\frac{10}{2}(1+28)=145$

4 (1) 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{20}=\frac{2^{21}-1}{2-1}$$

$$=2^{21}-1$$

(2) 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{20}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{21}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{21}\right\}$$

$$=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

1. 수열의 합과 그 활용

개념 넓히기 / P. 80

확인학습

1 복리로 계산하므로

$300,000(1+0.06)+300,000(1+0.06)^2+\cdots$
$+300,000(1+0.06)^{10}$

$=\dfrac{300,000\times1.06\times(1.06^{10}-1)}{1.06-1}$

$=\dfrac{300,000\times1.06\times0.791}{0.06}$

$=4,192,300$(원)

따라서 10년 후의 원리합계는 4,192,300원이다.

2 $a(1+0.01)+a(1+0.01)^2+\cdots+a(1+0.01)^{12}$

$=\dfrac{a\times1.01\times(1.01^{12}-1)}{1.01-1}$

$=\dfrac{a\times1.01\times0.13}{0.01}$

$=13.13a$

$13.13a=1,000,000$에서 $a≒76,161.46\cdots$

따라서 적립금 a는 76,161원이다.

바탕 다지기 / P. 81

| 스스로 하기 |

1 (1) $2k-1$

(2) $k(2k+1)$

2 n, 6, 7

1 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면

$\{a_n\}$: 2, 4, 8, 14, 22, $\cdots$

$\{b_n\}$: 2, 4, 6, 8, $\cdots$

이므로 $b_n=2n$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

$=2+\sum_{k=1}^{n-1}2k$

$=2+2\cdot\dfrac{(n-1)n}{2}$

$=n^2-n+2$

$\therefore a_{20}=20^2-20+2$

$=382$

2 원금 400,000원, 월이율 0.5 %의 단리로 3개월 동안 예금하였을 때의 이자는

(이자)=(원금)×(이율)×(기간)이므로

$400,000\times0.005\times3=6,000$(원)

기본 익히기 / P. 83

1 (1) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}=120$

$n(n+1)=240=15\times16$

$\therefore n=15$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=285$

$n(n+1)(2n+1)=6\times285$

$=6\times5\times3\times19$

$=9\times10\times19$

$\therefore n=9$

2 (1) 주어진 수열의 일반항 a_n은

$a_n=n(n+3)=n^2+3n$

첫째항부터 제n항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k)$

$=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1+9)}{6}$

$=\dfrac{n(n+1)(n+5)}{3}$

(2) 주어진 수열의 일반항 a_n은

$a_n=n^2(n+1)=n^3+n^2$

첫째항부터 제n항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2)$

$=\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=\dfrac{n(n+1)\{3n(n+1)+2(2n+1)\}}{12}$

$=\dfrac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{12}$

$=\dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$

3 (1) 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면

$\{a_n\}$: 1, 3, 9, 19, 33, 51, 73, ⋯

$\{b_n\}$: 2, 6, 10, 14, 18, 22 ⋯

이므로 $b_n=4n-2$

$$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-2)$$
$$=1+4\cdot\frac{(n-1)n}{2}-2(n-1)$$
$$=2n^2-4n+3 \text{ (단, } n\geq 2)$$

이때, $a_1=1=2\cdot 1^2-4\cdot 1+3$이므로 구하는 일반항은

$a_n=2n^2-4n+3$

첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-4k+3)$$
$$=2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}+3n$$
$$=\frac{n}{3}(2n^2-3n+4)$$

(2) 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면

$\{a_n\}$: 1, 3, −1, 7, −9, 23, −41, ⋯

$\{b_n\}$: 2, −4, 8, −16, 32, −64, ⋯

이므로 $b_n=-(-2)^n$

$$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\{-(-2)^k\}$$
$$=1+\frac{2\{1-(-2)^{n-1}\}}{1-(-2)}$$
$$=\frac{5+(-2)^n}{3} \text{ (단, } n\geq 2)$$

이때, $a_1=1=\frac{5+(-2)^1}{3}$이므로 구하는 일반항은

$$a_n=\frac{5+(-2)^n}{3}$$

첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{5+(-2)^k\}$$
$$=\frac{5}{3}n+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(-2)^k$$
$$=\frac{5}{3}n+\frac{1}{3}\cdot\frac{-2\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}$$
$$=-\frac{(-2)^{n+1}-15n+2}{9}$$

4 (1) 구하는 원리합계를 P라고 하면

$$P=500{,}000(1+0.05\times 3)$$
$$=500{,}000\times 1.15$$
$$=575{,}000(\text{원})$$

(2) 구하는 원리합계를 P라고 하면

$$P=500{,}000(1+0.04)^4$$
$$\fallingdotseq 584{,}929.28(\text{원})$$

따라서 원리합계는 584,929원이다.

5 한 층의 삼각형에서 밑변의 공의 개수가 n개이면 삼각형 모양 한 층의 공 전체의 개수는

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}(\text{개})$$

층층이 쌓아 올리면 7층이 되므로 전체 공의 개수는

$$\sum_{k=1}^{7}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{7}(k^2+k)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{7\times 8\times 15}{6}+\frac{7\times 8}{2}\right)$$
$$=84(\text{개})$$

실력 키우기 / P. 84

1 (1) 주어진 수열의 일반항 a_n은

$$a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

따라서 구하는 합은

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{12}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

(2) 주어진 수열의 일반항 a_n은

$$a_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\frac{2^n-1}{2-1}$$
$$=2^n-1$$

따라서 구하는 합은

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (2^k - 1) = \sum_{k=1}^{n} 2^k - \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= \frac{2(2^n - 1)}{2-1} - n = 2^{n+1} - 2 - n$$

2 $1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + \cdots + 10 \cdot a_{10}$의 값이 최대이려면 큰 수부터 차례로 큰 수가 곱해져야 한다. 또 그 값이 최소이려면 큰 수부터 차례로 작은 수가 곱해져야 한다. 즉,

$1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + \cdots + 10 \cdot a_{10}$의 최댓값은

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 10 \cdot 10$

$= \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$

$1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_3 + \cdots + 10 \cdot a_{10}$의 최솟값은

$1 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + \cdots + 10 \cdot 1$

$= \sum_{k=1}^{10} k(11-k)$

$= 11 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6}$

$= 110\left(\frac{11}{2} - \frac{21}{6}\right) = 220$

3 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면

$\{a_n\}$: 1, 2, 3, 6, 9, 14, 19, 26, $\cdots$

$\{b_n\}$: 1, 1, 3, 3, 5, 5, 7, $\cdots$

$\therefore a_{99} = a_1 + \sum_{k=1}^{98} b_k$

$= 1 + (1+1+3+3+5+5+\cdots+97+97)$

$= 1 + 2(1+3+5+\cdots+97)$

$= 1 + 2 \cdot \frac{49(1+97)}{2} = 4803$

$\therefore a_{100} = a_{99} + 99 = 4902$

4 정육각형의 개수로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$이라 하고 그 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면

$\{a_n\}$: 1, 7, 19, 37, $\cdots$

$\{b_n\}$: 6, 12, 18, $\cdots$

이므로 $b_n = 6n$

$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 6k = 1 + 6 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$

$= 3n^2 - 3n + 1$ (단, $n \geq 2$)

이때, $a_1 = 1 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$이므로 구하는 일반항은

$a_n = 3n^2 - 3n + 1$

| **참고** |

도형에서 n 번째 항과 $(n+1)$ 번째 항을 비교하면 $a_{n+1} = a_n + 6n$이다.

5 위로부터 n 번째 층에 있는 쌓기 나무의 개수를 a_n이라고 하자.

이때, $(n+1)$ 번째 층에 있는 쌓기 나무의 개수는 n 번째 층에 있는 쌓기 나무의 개수보다 $4n$개 더 많으므로

$a_{n+1} = a_n + 4n \quad \therefore a_{n+1} - a_n = 4n$

$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4k = 1 + 4 \cdot \frac{(n-1)n}{2}$

$= 2n^2 - 2n + 1$

따라서 구하는 쌓기 나무의 총 개수는

$\sum_{k=1}^{10} (2k^2 - 2k + 1)$

$= 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 10$

$= 670$(개)

프로젝트 / P. 85

1단계

원리합계
$a_1 = a \times 1.01^9$
$a_2 = a \times 1.01^8$
$a_3 = a \times 1.01^7$
$\vdots$
$a_9 = a \times 1.01$
$a_{10} = a$

2단계 $S = a \times 1.01^9 + a \times 1.01^8 + a \times 1.01^7 + \cdots + a$

$= \frac{a \times 1.01^9\left\{1 - \left(\frac{1}{1.01}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{1}{1.01}}$

$= \frac{a}{0.01}(1.01^{10} - 1)$

$= \frac{a}{0.01}(1.10 - 1)$

$= \frac{a}{0.01} \times 0.10$

$= 10a$(원)

3단계 $T = 2{,}000{,}000 \times 1.01^{10} = 2{,}000{,}000 \times 1.10$

$= 2{,}200{,}000$(원)

4단계 $S=T$를 만족하므로

$10a=2,200,000$

$\therefore a=220,000$(원)

대단원 확인하기 P. 86, 87

1 a, b, 6, c, d가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항의 성질을 이용하면

$a+6=2b$ ⋯⋯ ㉠

$b+c=12$ ⋯⋯ ㉡

$6+d=2c$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$b+c=12$, $a+d=12$

$\therefore a+b+c+d=24$

2 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{10}{2}(2a+9d)=10$

$\therefore 2a+9d=2$ ⋯⋯ ㉠

첫째항부터 제20항까지의 합은

$\frac{20}{2}(2a+19d)=40$

$\therefore 2a+19d=4$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{10}$, $d=\frac{1}{5}$

따라서 첫째항부터 제30항까지의 합은

$\frac{30}{2}\left\{2\times\frac{1}{10}+(30-1)\times\frac{1}{5}\right\}=90$

3 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라고 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$

$=\frac{a_1(1-r^{10})}{1-r}=7$ ⋯⋯ ㉠

수열 a_1, a_3, a_5, a_7, a_9는 첫째항이 a_1, 공비가 r^2, 항수가 5인 등비수열이므로

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$

$=\frac{a_1\{1-(r^2)^5\}}{1-r^2}$

$=\frac{1}{1+r}\cdot\frac{a_1(1-r^{10})}{1-r}=4$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{1+r}\cdot 7=4$, $1+r=\frac{7}{4}$

$\therefore r=\frac{3}{4}$

| 다른 풀이 |

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=4$에서

$a_1(1+r^2+r^4+r^6+r^8)=4$ ⋯⋯ ㉠

$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$

$\quad-(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)$

$=7-4=3$

이므로 $a_1r(1+r^2+r^4+r^6+r^8)=3$

이 식에 ㉠을 대입하면

$r\cdot 4=3$

$\therefore r=\frac{3}{4}$

4 (1) x가 a, y의 등비중항이므로

$x^2=ay$ ⋯⋯ ㉠

또 y가 x, b의 등비중항이므로

$y^2=xb$ ⋯⋯ ㉡

㉠을 제곱한 식에 ㉡을 대입하면

$x^4=a^2y^2=a^2xb$ $\quad\therefore x=a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ ⋯⋯ ㉢

㉠에서 $y=\frac{1}{a}x^2$이므로 여기에 ㉢을 대입하면

$y=\frac{1}{a}(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}})^2=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$

(2) $a=8$, $b=27$이므로

$x=8^{\frac{2}{3}}\times 27^{\frac{1}{3}}=4\times 3=12$

$y=8^{\frac{1}{3}}\times 27^{\frac{2}{3}}=2\times 9=18$

5 첫 번째 삼각형에서부터 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 개수를 나열하면

1, $1+3$, $1+3+5$, $\cdots$

따라서 한 변의 길이가 n일 때 만들어지는 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 개수는

$1+3+5+\cdots+(2n-1)$

$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

$=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$

$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$

$=n^2$

6 $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2$

$=\sum_{k=1}^{n}(k^3+2k^2+k)$

$=\sum_{k=1}^{n}k^3+2\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\quad+\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)}{12}\{3n(n+1)+4(2n+1)+6\}$

$=\frac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10)$

$=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}k(k+1)^2=\frac{10\times11\times12\times35}{12}$

$=10\times11\times35$

$=3850$

7 주어진 수열의 일반항이 $(2n-1)^2$이므로 첫째항부터 제n항까지의 합은

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$

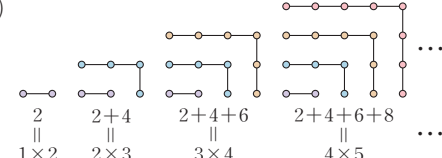
$=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$

$=4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$

$=\frac{n}{3}(4n^2-1)$

$=\frac{n}{3}(2n-1)(2n+1)$

8 (1) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하고, 수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라고 하면

$\{a_n\}$: 2, 6, 12, 20, 30, 42, ⋯

$\{b_n\}$: 4, 6, 8, 10, 12, ⋯

이므로 $b_n=2n+2$

$\therefore a_n=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)$

$=2+2\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}2$

$=2+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+2(n-1)$

$=n(n+1)\ (n\geq2)$

이때, $a_1=2=1\times(1+1)$이므로 구하는 일반항은 $a_n=n(n+1)$

(2)

2 = 1×2, 2+4 = 2×3, 2+4+6 = 3×4, 2+4+6+8 = 4×5 ⋯

$\therefore a_n=\underbrace{2+4+6+8+\cdots}_{n\text{개}}=\sum_{k=1}^{n}2k=n(n+1)$

9 n회째에 만들어진 도형의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각 $2n$, $2n-1$이므로 n회째에 만들어진 도형의 넓이를 a_n이라고 하면

$a_n=2n\times(2n-1)=4n^2-2n$

이때, 10회째까지 반복하여 완성한 도형에서 흰색 타일이 차지하는 넓이는

$a_1+(a_3-a_2)+(a_5-a_4)+(a_7-a_6)+(a_9-a_8)$

$=a_1+\sum_{n=1}^{4}(a_{2n+1}-a_{2n})$

$=a_1+\sum_{n=1}^{4}\{4(2n+1)^2-2(2n+1)-4(2n)^2+2(2n)\}$

$=a_1+\sum_{n=1}^{4}(16n+2)$

$=2+16\cdot\frac{4\cdot5}{2}+8=170$

그런데 흰색 타일 1개의 넓이는 2이므로 구하는 흰색 타일의 총 개수는 $\frac{170}{2}=85$(개)이다.

| 다른 풀이 |

n회째에 붙이는 타일의 개수를 a_n이라고 하면

$a_1=1$, $a_2=5$, $a_3=9$, ⋯

이므로

$a_n=1+(n-1)\times4=4n-3$

$\therefore a_{2n-1}=8n-7$

따라서 10회째까지 붙인 흰색 타일의 개수는

$\sum_{n=1}^{5}(8n-7)=8\cdot\frac{5\cdot6}{2}-35=85$(개)

10 (1) 구하는 원리합계는

1,000,000$(1+0.01\times5)$=1,050,000(원)

(2) 구하는 원리합계는

1,000,000$(1+0.01)^5$≒1,051,010(원)

(3) 복리로 예금한 것이 단리로 예금한 것보다 1,010원 더 많다.

Ⅳ. 확률과 통계

1. 확률과 그 활용

확률과 그 활용에 들어가기 전에 / P. 91

1 (1) $A\cap B=\{3, 5, 7\}$이므로
$n(A\cap B)=3$
(2) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=5+4-3=6$
(3) $n(A^C)=n(U)-n(A)$
$=10-5=5$
(4) $A-B=\{1, 9\}$이므로
$n(A-B)=2$

2 1에서 100까지의 숫자 중에서 11의 배수는 11, 22, 33, ⋯, 99의 9가지이고, 13의 배수는 13, 26, 39, ⋯, 91의 7가지이다.
한편 11과 13의 최소공배수는 143이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $9+7=16$(가지)

3 주사위 1개를 던질 때 나오는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6가지이고, 동전 1개를 던질 때 나오는 경우의 수는 앞면, 뒷면의 2가지이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $6\times2=12$(가지)

4 백의 자리에 올 수 있는 수는 4가지이고, 십의 자리에 올 수 있는 수는 백의 자리의 수를 제외한 3가지, 일의 자리에 올 수 있는 수는 백의 자리와 십의 자리의 수를 제외한 2가지이다.
따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는
${}_4P_3=4\times3\times2=24$(개)

5 ${}_nC_6={}_nC_8$에서 $6\neq8$이므로
$n-6=8$
$\therefore n=14$

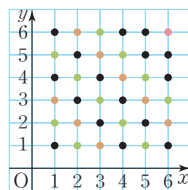
1. 확률의 뜻과 기본 성질

바탕 다지기 / P. 93

| 스스로 하기 |

1 7, 7　　**2** 285, $\frac{57}{100}$, $\frac{57}{100}$

1 7명 중 2명을 뽑는 모든 경우의 수는
${}_7C_2=21$(가지)
이고, 남학생 1명, 여학생 1명을 뽑는 경우의 수는 각각 ${}_4C_1$가지, ${}_3C_1$가지이다.
따라서 구하는 확률은
$$\frac{{}_4C_1\cdot{}_3C_1}{{}_7C_2}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$

2 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수를 다음과 같이 그림으로 나타낼 수 있다.

이때, 모든 경우의 수는 $6\times6=36$이다.
또 두 눈의 합이 3의 배수인 경우의 수는 12가지이고, 4의 배수인 경우의 수는 9가지이다.
한편 3의 배수이고 4의 배수인 경우의 수는 1가지이다.
그러므로 3의 배수 또는 4의 배수인 경우의 수는
$12+9-1=20$(가지)
따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

3 적어도 한 자루가 파란색 연필인 사건은 3자루가 모두 빨간색 연필인 사건의 여사건이므로 구하는 확률은
$$1-\frac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3}=1-\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$$

기본 익히기 / P. 94

1 (1) 두 눈의 수가 같은 경우의 수는
(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)의 6가지이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
(2) 두 눈의 수의 합이 8인 경우의 수는
(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{5}{36}$이다.

(3) 두 눈의 수의 곱이 어떤 자연수의 제곱인 경우의 수는
(1, 1), (1, 4), (2, 2), (4, 1),
(3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)
의 8가지이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

2 모든 경우의 수는 ${}_{10}C_4$가지이고, 쌀강정 2개, 보리강정 2개를 꺼내는 경우의 수는 각각 ${}_7C_2$가지, ${}_3C_2$가지이다.
따라서 구하는 확률은
$\frac{{}_7C_2 \cdot {}_3C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{63}{210}=\frac{3}{10}$

3 (1) 모든 경우의 수는 ${}_{30}C_2$가지이고, 당첨 복권이 아닌 복권을 2장 고르는 경우의 수는 ${}_{14}C_2$가지이므로 구하는 확률은
$\frac{{}_{14}C_2}{{}_{30}C_2}=\frac{91}{435}$
(2) 적어도 1장은 당첨 복권인 사건은 2장 모두 당첨 복권이 아닌 사건의 여사건이므로 구하는 확률은
$1-\frac{91}{435}=\frac{344}{435}$

4 주머니 속에 들어 있는 흰 공의 개수를 x개라고 하면, 3개의 흰 공을 뽑을 확률은 $\frac{{}_xC_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{6}$
그런데 ${}_{10}C_3=120$이므로
$\frac{{}_xC_3}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{6}=\frac{20}{120}$
즉, ${}_xC_3=20$이다.
$\therefore \frac{x(x-1)(x-2)}{3\times2\times1}=20$
$x(x-1)(x-2)=120$
$(x-6)(x^2+3x+20)=0$
$\therefore x=6$
따라서 주머니 속에 들어 있는 흰 공의 개수는 6개이다.
| **다른 풀이** |
$\frac{{}_xC_3}{{}_{10}C_3}=\frac{{}_xC_3}{120}=\frac{20}{120}$
${}_xC_3=20$을 만족하는 x를 찾아보면
${}_4C_3=4$, ${}_5C_3=10$, ${}_6C_3=20$
$\therefore x=6$

5 구하는 안타의 개수를 x개라고 하면 타율이 0.305이므로
$\frac{x}{200}=0.305 \qquad \therefore x=61$
따라서 이 선수가 이번 시즌에 200번의 타석에서 칠 수 있는 안타의 개수는 61개로 추측된다.

실력 키우기 / P. 95

1 $P(A^C)=0.4$이므로
$P(A)=1-0.4=0.6$
$P(B^C)=0.3$이므로
$P(B)=1-0.3=0.7$
$\therefore P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$
$=0.6+0.7-0.95$
$=0.35$

2 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$의 부분집합의 개수는 $2^4=16$이고, 원소 2가 속해 있는 부분집합의 개수는 $2^3=8$이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

3 만들 수 있는 네 자리 정수의 개수는 ${}_6P_4=360$
이때, 3400보다 큰 정수의 개수는 다음과 같다.
(i) 천의 자리에 4, 5, 6이 오는 경우
각각 $5\times4\times3=60$(가지)씩 있으므로 이 경우는 모두 $60\times3=180$(개)
(ii) 천의 자리에 3이 오는 경우
백의 자리에 올 수 있는 것은 4, 5, 6의 3가지이고, 이들 각각에 대하여 $4\times3=12$(가지)씩 있으므로 이 경우는 모두 $12\times3=36$(개)
따라서 3400보다 큰 정수는
$180+36=216$(개)
이므로 구하는 확률은 $\frac{216}{360}=\frac{3}{5}$

4 7개의 점에서 3개를 택하는 경우의 수는
${}_7C_3=35$(가지)
여기서 삼각형이 되는 경우는 l에서 2개, m에서 1개를 택하거나 l에서 1개, m에서 2개를 택할 때이므로 경우의 수는
${}_3C_2\cdot{}_4C_1+{}_3C_1\cdot{}_4C_2=12+18=30$(가지)
따라서 구하는 확률은 $\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$

5 공 CD의 개수를 x라고 하면, 공 CD가 아닌 것의 개수는 $(10-x)$개이므로

$1-\frac{{}_{10-x}C_4}{{}_{10}C_4}=\frac{13}{14}$

$\therefore \frac{{}_{10-x}C_4}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{14}$

그런데 ${}_{10}C_4=210$이므로

$\frac{{}_{10-x}C_4}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{14}=\frac{15}{210}$

$\therefore {}_{10-x}C_4=15$

$\frac{(10-x)(9-x)(8-x)(7-x)}{4\times3\times2\times1}=15$

$(x-4)(x-13)(x^2-17x+90)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=13$

그런데 $x\leq10$이므로

$x=4$

따라서 공 CD의 개수는 4개이다.

| **다른 풀이** |

${}_{10-x}C_4=15$를 만족시키는 x를 찾아보면

${}_4C_4=1,\ {}_5C_4=5,\ {}_6C_4=15$

따라서 $10-x=6$이므로

$x=4$

2. 통계와 그 활용

통계와 그 활용에 들어가기 전에 / P. 99

1 (평균)$=\frac{1}{5}(83+78+93+73+88)$

$=83$(초)

(표준편차)

$=\sqrt{\frac{1}{5}\{0^2+(-5)^2+10^2+(-10)^2+5^2\}}$

$=5\sqrt{2}$(초)

2 (1) $\sum_{k=1}^{n}x_kp_k$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k$

3 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2$

$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-2mx_k+m^2)$

$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2-\frac{2m}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+\frac{n}{n}m^2$

$=A-m^2$

4 동전을 던질 때 앞면이 나오는 경우를 H, 뒷면이 나오는 경우를 T라고 하면 표본공간 S는

$S=\{$HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT$\}$

(1) 앞면이 2번 나오는 사건은

{HHT, HTH, THH}

이므로 구하는 확률은 $\frac{3}{8}$이다.

(2) 앞면이 3번 나오는 사건은

{HHH}

이므로 구하는 확률은 $\frac{1}{8}$이다.

1. 확률변수와 확률분포

바탕 다지기 / P. 101

| **스스로 하기** |

1 (1) 6, {2, 4}, $\frac{1}{6}$

(2) $\frac{1}{6}$, 5

1 (평균)$=(-1)\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}$

$=0$

(분산)$=(-1)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{4}-0^2$

$=\frac{1}{2}$

기본 익히기 / P.102

1 $10\times\frac{1}{100}+5\times\frac{2}{100}+3\times\frac{5}{100}+2\times\frac{10}{100}$

$+1\times\frac{15}{100}$

$=\frac{1}{100}(10+10+15+20+15)$

$=0.7$(만 원)

따라서 구하는 기댓값은 7000원이다.

2 확률분포의 성질에 의하여

$2k+\frac{1}{4}+k+\frac{1}{4}=1$, $3k=\frac{1}{2}$

$\therefore k=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(2\le X\le 3)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$

$=\frac{5}{12}$

3 (1) 확률분포의 성질에 의하여

$a+\frac{a}{2}+a^2=1$

$2a^2+3a-2=0$

$(a+2)(2a-1)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because 0\le a\le 1$)

(2) $\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}$

$=-\frac{1}{4}$

$\mathrm{V}(X)=(-1)^2\times\frac{1}{2}+0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{4}$

$-\left(-\frac{1}{4}\right)^2$

$=\frac{11}{16}$

4 (1)

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

(2) (평균)$=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{2}{6}+3\times\frac{3}{6}$

$=\frac{7}{3}$

(분산)$=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{2}{6}+3^2\times\frac{3}{6}-\left(\frac{7}{3}\right)^2$

$=\frac{5}{9}$

(표준편차)$=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

5 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=3+5^2$

$=28$

실력 키우기 / P. 103

1 (1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 그 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{8}{15}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_0}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

(2) $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}$

$=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$

2 (1) 확률분포의 성질에 의하여

$\sum_{x=1}^{10}kx=1$이므로

$k\sum_{x=1}^{10}x=1$

$55k=1$

$\therefore k=\frac{1}{55}$

(2) (평균)$=\sum_{x=1}^{10}x\cdot\frac{x}{55}$

$=\frac{1}{55}\sum_{x=1}^{10}x^2$

$=\frac{1}{55}\times\frac{10\times11\times21}{6}$

$=7$

3 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고 그 확률은

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{1}{10}$

따라서 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

(평균)$=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}$

$=\frac{9}{5}$

(분산)$=1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{3}{5}+3^2\times\frac{1}{10}-\left(\frac{9}{5}\right)^2$

$=\frac{9}{25}$

4 동전을 던질 때, 앞면이 나오는 경우를 H, 뒷면이 나오는 경우를 T라고 하면, 동전을 두 번 던질 때 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 -2, 0, 2이다. 이때, 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	-2	0	2	합계
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$\therefore \mathrm{P}(X\le 0)=\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=0)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

5 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각 다음과 같다.

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{3}{20}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

$\therefore \mathrm{P}(X\le 2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

2. 이항분포

바탕 다지기 / P. 107

| 스스로 하기 |

1 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, ${}_{10}\mathrm{C}_x$

2 $\frac{1}{3}$, 60

1 (1) 0, 1, 2, ⋯, 100

(2) ${}_{100}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{100-x}$

(3) $\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{5}=20$

$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$

$\sigma(X)=\sqrt{16}=4$

기본 익히기 / P. 108

1 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(5,\ 0.1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\times 0.1^x\times 0.9^{5-x}$

(단, $x=0$, 1, 2, ⋯, 5)

2 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(10,\ 0.4)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=np=10\times 0.4=4$

$\mathrm{V}(X)=npq=10\times 0.4\times 0.6=2.4$

$\sigma(X)=\sqrt{2.4}$

따라서 확률변수 X의 평균은 4이고, 표준편차는 $\sqrt{2.4}$이다.

3 $np=12$, $\sqrt{np(1-p)}=3$이므로

$12(1-p)=9$에서 $1-p=\frac{3}{4}$ $\therefore p=\frac{1}{4}$

또 $np=n\cdot\frac{1}{4}=12$에서 $n=48$

따라서 구하는 n과 p의 값은 $n=48$, $p=\frac{1}{4}$이다.

4 병뚜껑을 5번 던질 때, 윗면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하면, X는 이항분포 $\mathrm{B}(5,\ 0.6)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X\ge 4)=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)$

$=0.2592+0.0778$

$=0.3370$

| 다른 풀이 |

계산기를 사용하면

$\mathrm{P}(X\ge 4)=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)$

$={}_5\mathrm{C}_4\times 0.6^4\times 0.4+{}_5\mathrm{C}_5\times 0.6^5$

$=0.2592+0.07776$

$=0.33696\fallingdotseq 0.3370$

5 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(20,\ 0.2)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=20\times0.2=4$

$\mathrm{V}(X)=20\times0.2\times0.8=3.2$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$3.2=\mathrm{E}(X^2)-4^2$

$\therefore \mathrm{E}(X^2)=19.2$

실력 키우기 / P. 109

1 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10$이다. 한 번의 시행에서 같은 색의 공이 나올 확률은

$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}+\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}=\dfrac{2}{5}$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \dfrac{2}{5}\right)$를 따른다. 따라서 구하는 확률분포의 식은

$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\dfrac{2}{5}\right)^x\left(\dfrac{3}{5}\right)^{10-x}$

$(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$

2 1의 눈이 나온 횟수를 확률변수 X라고 하면 X가 가질 수 있는 값은 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10$이다.

한 개의 주사위를 던질 때, 1의 눈이 나올 확률은 $\dfrac{1}{6}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \dfrac{1}{6}\right)$을 따른다.

따라서 구하는 상금의 기댓값은

$\displaystyle\sum_{x=0}^{10}25^x\,\mathrm{P}(X=x)$

$\displaystyle=\sum_{x=0}^{10}25^x\cdot{}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{10-x}$

$\displaystyle=\sum_{x=0}^{10}{}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{25}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{10-x}$

$=\left(\dfrac{25}{6}+\dfrac{5}{6}\right)^{10}=5^{10}$(원)

(또는 9765625원)

3 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(18,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따른다.

(1) $\mathrm{E}(X)=18\times\dfrac{1}{3}=6$

$\mathrm{V}(X)=18\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=4$

(2) $\displaystyle\sum_{x=0}^{18}x^2\cdot{}_{18}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}=\mathrm{E}(X^2)$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=4+6^2=40$

4 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(8,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따른다.

따라서 다음을 알 수 있다.

$\mathrm{E}(X)=8\times\dfrac{1}{2}=4$

$\mathrm{V}(X)=8\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=2+4^2=18$

$\therefore \mathrm{E}((X-a)^2)=\mathrm{E}(X^2-2aX+a^2)$

$=\mathrm{E}(X^2)-2a\mathrm{E}(X)+a^2$

$=18-2a\times4+a^2$

$=(a-4)^2+2$

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

5 예약한 사람 중 실제로 탑승하지 않는 사람의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(210,\ 0.1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=210\times0.1=21$

따라서 실제로 탑승하는 평균 인원 수는

$210-21=189$(명)

이므로 남은 좌석 수의 평균은

$200-189=11$(석)

3. 정규분포

바탕 다지기 / P. 111

| 스스로 하기 |

1 0.4987, 0.84

2 0.4772, 0.9544

1 (1) $\mathrm{P}(1\le Z\le3)=\mathrm{P}(0\le Z\le3)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

$=0.4987-0.3413$

$=0.1574$

(2) $\mathrm{P}(Z\le1.96)=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.96)$

$=0.5+0.4750$

$=0.9750$

2 (1) $\mathrm{P}(Z\le c)=\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le c)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le c)=0.9495$

이므로 $\mathrm{P}(0\le Z\le c)=0.4495$

$\therefore c=1.64$

(2) $P(Z \geq c)=1-P(Z \leq c)=0.1003$

이므로 $P(Z \leq c)=0.8997$

한편

$P(Z \leq c)=P(Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq c)$

$=0.5+P(0 \leq Z \leq c)$

$=0.8997$

이므로 $P(0 \leq Z \leq c)=0.3997$

$\therefore c=1.28$

기본 익히기 / P. 112

1 (1) $P(X \leq 66)=P\left(\dfrac{X-60}{5} \leq \dfrac{66-60}{5}\right)$

$=P(Z \leq 1.2)$

$=P(Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 1.2)$

$=0.5+0.3849$

$=0.8849$

(2) $P(63 \leq X \leq 69)$

$=P\left(\dfrac{63-60}{5} \leq \dfrac{X-60}{5} \leq \dfrac{69-60}{5}\right)$

$=P(0.6 \leq Z \leq 1.8)$

$=P(Z \leq 1.8)-P(Z \leq 0.6)$

$=(0.5+0.4641)-(0.5+0.2257)$

$=0.2384$

(3) $P(X \geq 69)=P\left(\dfrac{X-60}{5} \geq \dfrac{69-60}{5}\right)$

$=P(Z \geq 1.8)$

$=0.5-P(0 \leq Z \leq 1.8)$

$=0.5-0.4641$

$=0.0359$

(4) $P(54 \leq X \leq 63)$

$=P\left(\dfrac{54-60}{5} \leq \dfrac{X-60}{5} \leq \dfrac{63-60}{5}\right)$

$=P(-1.2 \leq Z \leq 0.6)$

$=P(0 \leq Z \leq 1.2)+P(0 \leq Z \leq 0.6)$

$=0.3849+0.2257$

$=0.6106$

2 $P(|X-m| \leq 2\sigma)=P(-2\sigma \leq X-m \leq 2\sigma)$

$=P\left(\dfrac{-2\sigma}{\sigma} \leq \dfrac{X-m}{\sigma} \leq \dfrac{2\sigma}{\sigma}\right)$

$=P(-2 \leq Z \leq 2)$

$=2 \times P(0 \leq Z \leq 2)$

$=2 \times 0.4772$

$=0.9544$

3 제품의 무게를 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(30,\ 0.5^2)$을 따른다.

$P(29 \leq X \leq 31)$

$=P\left(\dfrac{29-30}{0.5} \leq \dfrac{X-30}{0.5} \leq \dfrac{31-30}{0.5}\right)$

$=P(-2 \leq Z \leq 2)$

$=2 \times P(0 \leq Z \leq 2)$

$=2 \times 0.4772$

$=0.9544$

이므로 불량품으로 판정될 확률은

$P(X \leq 29)+P(X \geq 31)=1-P(29 \leq X \leq 31)$

$=1-0.9544$

$=0.0456$

따라서 폐기 처분되는 제품의 개수는

$10000 \times 0.0456=456$(개)

4 최고 혈압을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(130,\ 15^2)$을 따른다.

$P(X \geq 160)=P\left(\dfrac{X-130}{15} \geq \dfrac{160-130}{15}\right)$

$=P(Z \geq 2)$

$=1-P(Z \leq 2)$

$=1-\{0.5+P(0 \leq Z \leq 2)\}$

$=1-(0.5+0.4772)$

$=0.0228$

따라서 이 지역의 40대 주민 중 최고 혈압이 고혈압의 범위에 속하는 사람은 2.28 %이다.

5 응시자의 시험 점수를 확률변수 X라 하고, 평점 A를 받기 위한 최소 점수를 x점이라고 하자. 이때, 확률변수 X는 정규분포 $N(60,\ 10^2)$을 따른다.

$P(X \geq x)=0.063$

$P\left(\dfrac{X-60}{10} \geq \dfrac{x-60}{10}\right)=0.063$

$P\left(Z \geq \dfrac{x-60}{10}\right)=0.063$

$0.5-P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{x-60}{10}\right)=0.063$

$P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{x-60}{10}\right)=0.437$

$\dfrac{x-60}{10}=1.53 \qquad \therefore x=75.3$

따라서 적어도 75.3점을 받아야 한다.

실력 키우기 / P. 113

1 $\mathrm{P}(X\le 12)=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-m}{\sigma}\le\dfrac{12-m}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(X\ge 26)=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-m}{\sigma}\ge\dfrac{26-m}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(X\le 12)=\mathrm{P}(X\ge 26)$이므로

$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{12-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{26-m}{\sigma}\right)$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{-12+m}{\sigma}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{26-m}{\sigma}\right)$

$\dfrac{-12+m}{\sigma}=\dfrac{26-m}{\sigma}$

$\therefore m=19$

2 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(18,\ 2^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(a\le X\le b)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{a-18}{2}\le\dfrac{X-18}{2}\le\dfrac{b-18}{2}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{a-18}{2}\le Z\le\dfrac{b-18}{2}\right)$

$=0.8185$

$=0.3413+0.4772$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

(i) $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$

일 때

$\dfrac{a-18}{2}=-1 \qquad \therefore a=16$

$\dfrac{b-18}{2}=2 \qquad \therefore b=22$

(ii) $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)$

일 때

$\dfrac{a-18}{2}=-2 \qquad \therefore a=14$

$\dfrac{b-18}{2}=1 \qquad \therefore b=20$

이때, $a>15$이므로

$a=16,\ b=22$

3 학생들의 등교 시간을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따른다.

(1) $\mathrm{P}(12\le X\le 16)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{12-20}{4}\le\dfrac{X-20}{4}\le\dfrac{16-20}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le -1)$

$=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4772-0.3413$

$=0.1359$

따라서 등교 시간이 12분 이상 16분 이하인 학생은 13.59 %이다.

(2) $\mathrm{P}(X\ge 28)=\mathrm{P}\left(\dfrac{X-20}{4}\ge\dfrac{28-20}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

이때, $750\times 0.0228=17.1$이므로 등교 시간이 28분 이상인 학생의 수는 18명으로 추측한다.

4 응시자의 성적을 확률변수 X라 하고, 합격자의 최저 점수를 x점이라고 하자. 이때, 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(800,\ 50^2)$을 따른다.

응시자 2000명 중 합격자 238명은 상위

$\dfrac{238}{2000}=0.119$ 이내에 속하므로

$\mathrm{P}(X\ge x)=0.119$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{X-800}{50}\ge\dfrac{x-800}{50}\right)=0.119$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{x-800}{50}\right)=0.119$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{x-800}{50}\right)=0.119$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{x-800}{50}\right)=0.381$

$\dfrac{x-800}{50}=1.18$

$\therefore x=859$

따라서 합격자의 최저 점수는 859점이다.

5 수학 성적을 확률변수 X라 하고, 상위 63등 이내에 들기 위한 최저 점수를 x점이라고 하자. 이때, 확률변수 X는 정규분포 $N(70,\ 10^2)$을 따른다.

1000명 중 상위 63명의 비율은 $\frac{63}{1000}=0.063$

이므로

$P(X\geq x)=0.063$

$P\left(\frac{X-70}{10}\geq\frac{x-70}{10}\right)=0.063$

$P\left(Z\geq\frac{x-70}{10}\right)=0.063$

$0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{x-70}{10}\right)=0.063$

$P\left(0\leq Z\leq\frac{x-70}{10}\right)=0.437$

$\frac{x-70}{10}=1.53$

$\therefore x=85.3$

따라서 85.3점 이상을 받아야 한다.

4. 통계 조사와 그 활용

바탕 다지기 / P. 115

| 스스로 하기 |

1 (1) 농어촌 (2) 표본 (3) 100

2 (1) 4.9, 239.9 (2) 241.45

기본 익히기 / P. 116

1 $m=2000,\ \sigma=200,\ n=100$이므로 표본평균

$\overline{X}$는 $E(\overline{X})=2000,\ \sigma(\overline{X})=\frac{200}{\sqrt{100}}=20$인

정규분포 $N(2000,\ 20^2)$을 따른다.

$P(2000\leq\overline{X}\leq2040)$

$=P\left(\frac{2000-2000}{20}\leq\frac{\overline{X}-2000}{20}\leq\frac{2040-2000}{20}\right)$

$=P(0\leq Z\leq2)$

$=0.4772$

따라서 구하는 확률은 0.4772이다.

2 $m=175,\ \sigma=10,\ n=25$이므로 표본평균

$\overline{X}$는 $E(\overline{X})=175,\ \sigma(\overline{X})=\frac{10}{\sqrt{25}}=2$인

정규분포 $N(175,\ 2^2)$을 따른다.

$P(177\leq\overline{X}\leq179)$

$=P\left(\frac{177-175}{2}\leq\frac{\overline{X}-175}{2}\leq\frac{179-175}{2}\right)$

$=P(1\leq Z\leq2)$

$=P(0\leq Z\leq2)-P(0\leq Z\leq1)$

$=0.4772-0.3413$

$=0.1359$

따라서 구하는 확률은 0.1359이다.

3 신뢰구간의 길이는

$\left(\overline{x}+\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{x}-\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$

이다.

여기서 k는 신뢰도를 높일수록 그 값이 커진다.

예를 들어 신뢰도가 95 %이면 $k=1.96$이고 신뢰도가 99 %이면 $k=2.58$이다.

따라서 신뢰도를 높이면 신뢰구간의 길이는 길어진다. 그러므로 ㄱ은 옳다.

한편 $\overline{x}$는 신뢰구간의 길이에 영향을 미치지 않는다. 그러므로 ㄴ은 옳지 않다.

또 표본의 크기 n이 커지면 신뢰구간의 길이는 짧아진다. 그러므로 ㄷ은 옳다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

4 크기 100인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라고 하면

$\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\ \frac{100^2}{100}\right)$을 따른다.

(1) 모평균을 m이라고 하면

$1000-1.96\frac{100}{\sqrt{100}}\leq m\leq1000+1.96\frac{100}{\sqrt{100}}$

$1000-19.6\leq m\leq1000+19.6$

$\therefore 980.4\leq m\leq1019.6$

(2) 모평균을 m이라고 하면

$1000-2.58\frac{100}{\sqrt{100}}\leq m\leq1000+2.58\frac{100}{\sqrt{100}}$

$1000-25.8\leq m\leq1000+25.8$

$\therefore 974.2\leq m\leq1025.8$

5 $n=400$, 표본비율 $\hat{p}=0.64$이고, 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포를 따른다.
모비율을 p라 하고, p를 신뢰도 95 %로 구간추정하면

$$0.64-1.96\sqrt{\frac{0.64\times0.36}{400}}\le p\le0.64+1.96\sqrt{\frac{0.64\times0.36}{400}}$$

$\therefore 0.59296\le p\le0.68704$

실력 키우기 / P. 118

1 표본으로 택한 100가구의 소득의 평균을 $\overline{X}$만 원이라고 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(330,\ \frac{20^2}{100}\right)$을 따른다.

$\mathrm{P}(|\overline{X}-330|\ge5)$
$=1-\mathrm{P}(|\overline{X}-330|\le5)$
$=1-\mathrm{P}(-5\le\overline{X}-330\le5)$
$=1-\mathrm{P}\left(\frac{-5}{2}\le\frac{\overline{X}-330}{2}\le\frac{5}{2}\right)$
$=1-\mathrm{P}(-2.5\le Z\le2.5)$
$=1-2\times\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)$
$=1-2\times0.4938$
$=0.0124$
따라서 구하는 확률은 0.0124이다.

2 표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 95 %로 구간추정하면 모평균 m의 신뢰구간은

$$80-1.96\frac{10}{\sqrt{n}}\le m\le80+1.96\frac{10}{\sqrt{n}}$$

이므로 $1.96\frac{10}{\sqrt{n}}=1.96$

$\therefore n=100$

3 표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 95 %로 구간추정하면 모평균 m의 신뢰구간의 길이는

$$\left(\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\times1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

여기에서 $\sigma=5$이므로

$2\times1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le1$

$\frac{19.6}{\sqrt{n}}\le1$

$\frac{\sqrt{n}}{19.6}\ge1$ $\quad\therefore n\ge384.16$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 385이다.

4 표본비율의 값은 $\hat{p}=\frac{40}{400}=0.1$이므로
모비율 p를 신뢰도 95 %로 구간추정하면

$$0.1-1.96\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{400}}\le p\le0.1+1.96\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{400}}$$

$0.1-0.0294\le p\le0.1+0.0294$
$\therefore 0.0706\le p\le0.1294$

5 모비율 p를 신뢰도 95 %로 구간추정할 때 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

여기서 $\hat{p}\hat{q}=\hat{p}(1-\hat{p})$은 $\hat{p}=0.5$일 때 최댓값 0.25를 가지므로

$2\times1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\le2\times1.96\frac{0.5}{\sqrt{n}}\le0.08$

$\sqrt{n}\ge\frac{100}{8}\times1.96$

$\therefore n\ge600.25$
따라서 표본의 크기의 최솟값은 601이다.

대단원 확인하기 P. 120, 121

1 두 명의 축구 선수 중 적어도 한 명이 페널티 킥으로 공을 넣는 사건을 A라고 하면 여사건 A^C는 두 명 모두 페널티 킥으로 공을 넣지 못하는 사건이므로
$\mathrm{P}(A^C)=(1-0.9)\times(1-0.8)=0.02$
따라서 적어도 한 명이 페널티 킥으로 공을 넣을 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-0.02=0.98$

2 (i) B가 C를 이기고 다시 A가 B를 이기는 경우의 확률은 $\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

(ii) C가 B를 이기고 다시 A가 C를 이기는 경우의 확률은 $\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{16}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은
$\frac{3}{8}+\frac{3}{16}=\frac{9}{16}$

3 (1) 확률분포의 성질에 의하여
$0.35+0.3+0.2+0.1+a=1$에서
$a=0.05$

(2) $1\times0.35+2\times0.3+3\times0.2+4\times0.1$
$+5\times0.05=2.2$(명)

4 (1) 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 그 확률은

$$P(X=0)=\frac{{}_4C_0\times{}_4C_3}{{}_8C_3}=\frac{1}{14}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_4C_2}{{}_8C_3}=\frac{3}{7}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_4C_1}{{}_8C_3}=\frac{3}{7}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_4C_3\times{}_4C_0}{{}_8C_3}=\frac{1}{14}$$

따라서 확률변수 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$	1

(2) $E(X)=0\times\frac{1}{14}+1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{1}{14}$
$=\frac{3}{2}$

$V(X)=0^2\times\frac{1}{14}+1^2\times\frac{3}{7}+2^2\times\frac{3}{7}+3^2\times\frac{1}{14}$
$-\left(\frac{3}{2}\right)^2$
$=\frac{15}{28}$

5 예약한 사람 62명 중 공연장에 온 사람의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B(62,\ 0.95)$를 따른다. 이때, 좌석이 부족한 것은 $X\geq61$의 경우이므로

$P(X\geq61)=P(X=61)+P(X=62)$
$={}_{62}C_{61}\times0.95^{61}\times0.05+{}_{62}C_{62}\times0.95^{62}$
$=62\times0.0438\times0.05+0.0416$
$=0.13578+0.0416$
$=0.17738$

따라서 구하는 확률은 0.17738이다.

6 버스 20대 중 연착하는 버스의 수를 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B(20,\ 0.1)$을 따른다.

$\therefore P(X\leq3)=P(X=0)+P(X=1)$
$+P(X=2)+P(X=3)$
$=0.1216+0.2702+0.2852+0.1901$
$=0.8671$

7 접속 시간을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(40,\ 5^2)$을 따른다.

$P(X>50)=P\left(\frac{X-40}{5}>\frac{50-40}{5}\right)$
$=P(Z>2)=0.5-P(0\leq Z\leq2)$
$=0.5-0.4772=0.0228$

$\therefore 1000\times0.0228=22.8$

따라서 구하는 사람의 수는 약 23명이다.

8 지원자의 성적을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $N(50,\ 10^2)$을 따른다.

이때, 합격자의 비율은 $\frac{10}{100}=0.1$이므로 합격자의 최저 점수를 x점이라고 하면 $P(X\geq x)=0.1$

$P\left(\frac{X-50}{10}\geq\frac{x-50}{10}\right)=0.1$

$P\left(Z\geq\frac{x-50}{10}\right)=0.1$

$P\left(0\leq Z\leq\frac{x-50}{10}\right)=0.4$

$\frac{x-50}{10}=1.28$ $\quad\therefore x=62.8$

따라서 합격자의 최저 점수는 62.8점이다.

9 (1) $n=25,\ \bar{x}=32.2,\ \sigma=0.5$이므로

신뢰도 95 %로 모평균 m의 범위를 구간추정하면

$32.2-1.96\frac{0.5}{\sqrt{25}}\leq m\leq32.2+1.96\frac{0.5}{\sqrt{25}}$

$32.2-0.196\leq m\leq32.2+0.196$

$\therefore 32.004\leq m\leq32.396$

(2) 표본의 크기가 n일 때, 신뢰도 95 %로 구간추정한 모평균 m의 신뢰구간의 길이는

$\left(\bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\times1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

여기서 $\sigma=0.5$이므로

$2\times1.96\frac{0.5}{\sqrt{n}}\leq0.2$

$\sqrt{n}\geq9.8$

$\therefore n\geq96.04$

따라서 구하는 표본의 크기의 최솟값은 97이다.

10 $\hat{p}=0.2,\ n=100$이므로 모비율 p를 신뢰도 95 %로 구간추정하면

$0.2-1.96\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}\leq p\leq0.2+1.96\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}$

$0.2-0.0784\leq p\leq0.2+0.0784$

$\therefore 0.1216\leq p\leq0.2784$

Ⅴ. 도형과 그래프

1. 도형과 그래프

도형과 그래프에 들어가기 전에 / P. 125

1 (1) 오각형　　(2) 정육각형

2 (1) 칠면체　　(2) 팔면체

3 (1) $\frac{4(4-3)}{2}=2$(개)　　(2) $\frac{6(6-3)}{2}=9$(개)

(3) $\frac{8(8-3)}{2}=20$(개)　　(4) $\frac{12(12-3)}{2}=54$(개)

4

	꼭짓점의 개수	면의 개수	모서리의 개수
(1) 오각뿔	6	6	10
(2) 사각기둥	8	6	12
(3) 사각뿔대	8	6	12
(4) 팔각뿔대	16	10	24

1. 연결 상태가 같은 도형, 2. 그래프

바탕 다지기 / P. 128

| 스스로 하기 |

1 (1) BC, CD, CE　(2) BD, CE

2 8, 4, 8, 4, 2

1 주어진 그림에서 홀수점은 P와 Q뿐이므로 한붓그리기는 P에서 시작하여 Q로 끝나거나 Q에서 시작하여 P로 끝난다. 가능한 경로의 예는 다음과 같다.

프로젝트 / P. 129

1단계

2단계

3단계

C는 단일폐곡선의 내부에, E는 외부에 있다. 이때, C는 단일폐곡선의 내부에, E는 외부에 있으므로 조건에 맞게 C와 E를 연결하는 선을 그을 수 없다.

4단계 AC, AD, BD, BE의 최대 4개의 도로를 만들 수 있다.

논술/수행평가 과제

최대 6개의 도로를 만들 수 있다. 그 예는 다음과 같다.

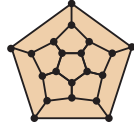
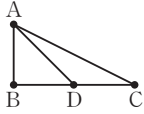
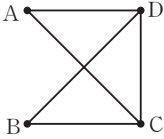
기본 익히기 / P. 130

1 ㄱ과 ㅁ,
ㄴ과 ㅂ,
ㄷ과 ㄹ

2

3 (1) 홀수점이 4개이므로 한붓그리기가 불가능하다.
(2) 홀수점이 2개이므로 한붓그리기가 가능하다.
(3) 모든 꼭짓점이 짝수점이므로 한붓그리기가 가능하다.
따라서 한붓그리기가 가능한 것은 (2), (3)이다.

4 꼭짓점의 개수 v, 변의 개수 e, 면의 개수 f 사이에 $v-e+f=2$인 관계가 성립하므로
$10-10+f=2$　　$\therefore f=2$
따라서 면의 개수는 2개이다.

5 정십이면체를 평면그래프로 나타내면 오른쪽과 같다.
∴ $v=20$, $e=30$, $f=12$

6 꼭짓점의 집합은 {A, B, C, D}이고
변의 집합은 {AC, AD, BC, BD, CD}이다.
따라서 그래프로 나타내면 오른쪽과 같다.

실력 키우기 / P. 131

1

2 (1) 홀수점이 6개이므로 변 1개를 추가하여도 홀수점이 4개이다.
따라서 한붓그리기가 가능하지 않다.
(2) 홀수점이 4개이므로 변 1개를 추가하면 홀수점이 2개가 될 수 있다.
따라서 한붓그리기가 가능하다.
(3) 홀수점이 4개이므로 변 1개를 추가하면 홀수점이 2개가 될 수 있다.
따라서 한붓그리기가 가능하다.
따라서 변을 1개 추가하였을 때, 한붓그리기가 가능한 것은 (2), (3)이다.

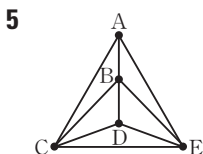
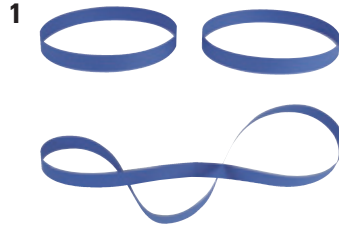
3 모서리의 개수를 e라고 하면 꼭짓점의 개수가 6, 면의 개수가 5이므로 $6-e+5=2$ $\therefore e=9$
따라서 모서리의 개수는 9개이다.

4 각 꼭짓점에 연결된 모서리의 개수는 다음과 같다.
정사면체 : 3개 정육면체 : 3개
정팔면체 : 4개 정십이면체 : 3개
정이십면체 : 5개
정팔면체를 제외한 다른 정다면체의 평면그래프는 홀수점이 3개 이상이므로 한붓그리기가 가능하지 않다. 그러나 정팔면체의 평면그래프는 모든 꼭짓점이 짝수점이므로 한붓그리기가 가능하다.

5

개념 넓히기 / P. 132

확인학습

1

원통 모양의 곡면을 자르면 두 개의 원통 모양의 곡선이 생기고, 뫼비우스의 띠를 자르면 네 번 꼬인 띠가 1개 만들어진다.

2

한 번 꼬인 뫼비우스의 띠 1개와 네 번 꼬인 띠 1개가 서로 고리로 연결되어 있다.

3. 그래프와 최적화

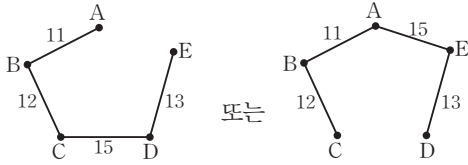
바탕 다지기 / P. 134

| 스스로 하기 |
1 B, 90, 150, C, 30, 140

기본 익히기 / P. 135

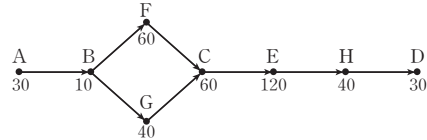
1 A에서 H까지, B에서 H까지 가는 모든 경로와 걸리는 시간은 다음과 같다.
A → C → E → G → H
: $5+6+19+12+8=50$(일)
A → C → F → G → H
: $5+6+15+12+8=46$(일)
B → D → F → G → H
: $7+10+15+12+8=52$(일)
따라서 다리 건설을 끝마치는 데 필요한 최소의 시간은 52일이다.

2 다음과 같이 각 마을을 꼭짓점으로 하고, 마을을 연결하는 포장도로를 변으로 하는 그래프에서 적은 비용이 드는 순서대로 변을 택하면 AB, BC, DE이다.

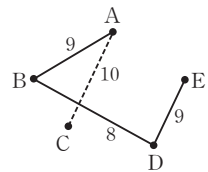
다음으로 A, B, C와 D, E를 연결하기 위하여 AE 또는 CD를 택하면 된다.

따라서 포장도로를 닦는 데 드는 최소 비용은
$11+12+13+15=51$(백만 원)
즉, 51000000원이다.

3 모든 경로와 걸리는 시간은 다음과 같다.
A → B → C → D → E → A,
A → E → D → C → B → A
: $5+3+6+2+4=20$(시간)
A → B → C → E → D → A,
A → D → E → C → B → A
: $5+3+5+2+3=18$(시간)
A → B → D → C → E → A,
A → E → C → D → B → A
: $5+6+6+5+4=26$(시간)
A → B → D → E → C → A,
A → C → E → D → B → A
: $5+6+2+5+5=23$(시간)
A → B → E → C → D → A,
A → D → C → E → B → A
: $5+9+5+6+3=28$(시간)
A → B → E → D → C → A,
A → C → D → E → B → A
: $5+9+2+6+5=27$(시간)
A → C → B → D → E → A,
A → E → D → B → C → A
: $5+3+6+2+4=20$(시간)
A → C → B → E → D → A,
A → D → E → B → C → A
: $5+3+9+2+3=22$(시간)
A → C → D → B → E → A,
A → E → B → D → C → A
: $5+6+6+9+4=30$(시간)
A → C → E → B → D → A,
A → D → B → E → C → A
: $5+5+9+6+3=28$(시간)
A → D → B → C → E → A,
A → E → C → B → D → A
: $3+6+3+5+4=21$(시간)
A → D → C → B → E → A,
A → E → B → C → D → A
: $3+6+3+9+4=25$(시간)
따라서 걸리는 최소의 시간은 18시간이다.

실력 키우기 / P. 136

1 각 경기와 행사에 걸리는 시간과 순서를 그래프로 나타내면 다음과 같다.

이때, A에서 D로 가는 모든 경로와 걸린 시간은 다음과 같다.
A → B → F → C → E → H → D
: $30+10+60+60+120+40+30=350$(분)
A → B → G → C → E → H → D
: $30+10+40+60+120+40+30=330$(분)
따라서 체육 대회를 끝마치는 데 필요한 최소의 시간은 350분이다.

2 각 건물을 꼭짓점으로 하고, 연결 통로를 변으로 하는 그래프에서 비용이 적은 순서대로 변을 택하면 BD, AB, DE이다.
다음으로 C를 A, B, D, E와 연결하는 변 중 비용이 최소인 것은 AC이다.

따라서 비 가림 연결 통로로 공사를 하는 데 드는 최소 비용은
$8+9+9+10=36$(백만 원)
즉, 36000000원이다.

3 조건에 맞는 모든 경로와 이동 거리는 다음과 같다.
O → P → Q → R → S → O
: $6+4+7+3+4=24$ (km)
O → P → Q → S → R → O
: $6+4+5+3+5=23$ (km)

O → P → R → Q → S → O
: 6+3+7+5+4=25 (km)
O → P → R → S → Q → O
: 6+3+3+5+8=25 (km)
O → P → S → Q → R → O
: 6+6+5+7+5=29 (km)
O → P → S → R → Q → O
: 6+6+3+7+8=30 (km)
O → R → P → Q → S → O
: 5+3+4+5+4=21 (km)
O → R → P → S → Q → O
: 5+3+6+5+8=27 (km)
O → R → S → P → Q → O
: 5+3+6+4+8=26 (km)
O → S → P → Q → R → O
: 4+6+4+7+5=26 (km)
O → S → P → R → Q → O
: 4+6+3+7+8=28 (km)
O → S → R → P → Q → O
: 4+3+3+4+8=22 (km)
따라서 최소 이동 거리는 21 km이다.

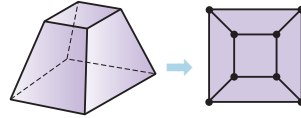
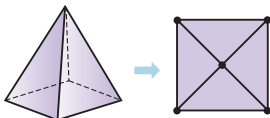
대단원 확인하기 P. 138, 139

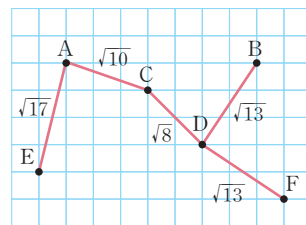
1 ㄱ과 ㅁ, ㄴ과 ㄷ, ㄹ과 ㅂ

2 ㄱ과 ㄷ, ㄴ과 ㄹ

3 출발점과 도착점을 정하면 경로가 하나씩 결정된다. 그래프에서 출발점을 정하는 방법은 5가지이고, 각 출발점에 대하여 도착점을 정하는 방법이 4가지씩 이므로 $5\times4=20$(가지)

4 (1) 홀수점이 2개이므로 한붓그리기가 가능하다.
(2) $v=7$, $e=13$, $f=8$
$\therefore v-e+f=7-13+8=2$

5 홀수점이 6개이므로 홀수점을 2개로 만들기 위하여 홀수점과 홀수점을 잇는 변을 2개 추가하면 된다. 따라서 최소한 2개의 변을 추가해야 한다.

6
7
8 A에서 J로 가는 모든 경로와 걸리는 시간은 다음과 같다.
A → D → G → I → J
: 4+6+5+10+3=28(분)
B → D → G → I → J
: 6+6+5+10+3=30(분)
C → E → H → I → J
: 8+4+4+10+3=29(분)
F → H → I → J
: 5+4+10+3=22(분)
따라서 음식을 만드는 데 필요한 최소의 시간은 30분이다.

9 $\overline{AC}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ (km)
$\overline{CD}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}$ (km)
$\overline{CB}=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$ (km)
$\overline{BD}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ (km)
$\overline{AE}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$ (km)
$\overline{DF}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$ (km)
⋮
두 마을 사이의 거리가 짧은 순서대로 변을 택하면 CD, AC, BD, DF이다.
다음으로 E를 A, B, C, D, F와 연결하는 변 중 거리가 최소인 것은 AE이다.

따라서 최소 공사 비용은
8+10+13+13+17=61(백만 원)
즉, 61000000원이다.

상용로그표 (1)

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

상용로그표(2)

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

이항분포표

$\mathrm{P}(X=x)={}_n\mathrm{C}_x p^x q^{n-x}$ (단, $q=1-p$)

n	x	p										
		.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
1	0	.9500	.9000	.8000	.7000	.6000	.5000	.4000	.3000	.2000	.1000	.0500
	1	.0500	.1000	.2000	.3000	.4000	.5000	.6000	.7000	.8000	.9000	.9500
2	0	.9025	.8100	.6400	.4900	.3600	.2500	.1600	.0900	.0400	.0100	.0025
	1	.0950	.1800	.3200	.4200	.4800	.5000	.4800	.4200	.3200	.1800	.0950
	2	.0025	.0100	.0400	.0900	.1600	.2500	.3600	.4900	.6400	.8100	.9025
3	0	.8574	.7290	.5120	.3430	.2160	.1250	.0640	.0270	.0080	.0010	.0001
	1	.1354	.2430	.3840	.4410	.4320	.3750	.2880	.1890	.0960	.0270	.0071
	2	.0071	.0270	.0960	.1890	.2880	.3750	.4320	.4410	.3840	.2430	.1354
	3	.0001	.0010	.0080	.0270	.0640	.1250	.2160	3430	.5120	.7290	.8574
4	0	.8145	.6561	.4096	.2401	.1296	.0625	.0256	.0081	.0016	.0001	.0000
	1	.1715	.2916	.4096	.4116	.3456	.2500	.1536	.0756	.0256	.0036	.0005
	2	.0135	.0486	.1536	.2646	.3456	.3750	.3456	.2646	.1536	.0486	.0135
	3	.0005	.0036	.0256	.0756	.1536	.2500	.3456	.4116	.4096	.2916	.1715
	4	.0000	.0001	.0016	.0081	.0256	.0625	.1296	.2401	.4096	.6561	.8145
5	0	.7738	.5905	.3277	.1681	.0778	.0312	.0102	.0024	.0003	.0000	.0000
	1	.2036	.3280	.4096	.3602	.2592	.1562	.0768	.0284	.0064	.0005	.0000
	2	.0214	.0729	.2048	.3087	.3456	.3125	.2304	.1323	.0512	.0081	.0011
	3	.0011	.0081	.0512	.1323	.2304	.3125	.3456	.3087	.2048	.0729	.0214
	4	.0000	.0004	.0064	.0283	.0768	.1562	.2592	.3601	.4096	.3281	.2036
	5	.0000	.0000	.0003	.0024	.0102	.0312	.0778	.1681	.3277	.5905	.7738
6	0	.7351	.5314	.2621	.1176	.0467	.0156	.0041	.0007	.0001	.0000	.0000
	1	.2321	.3543	.3932	.3025	.1866	.0937	.0369	.0102	.0015	.0001	.0000
	2	.0305	.0984	.2458	.3241	.3110	.2344	.1382	.0595	.0154	.0012	.0001
	3	.0021	.0146	.0819	.1852	.2765	.3125	.2765	.1852	.0819	.0146	.0021
	4	.0001	.0012	.0154	.0595	.1382	.2344	.3110	.3241	.2458	.0984	.0305
	5	.0000	.0001	.0015	.0102	.0369	.0937	.1866	.3025	.3932	.3543	.2321
	6	.0000	.0000	.0001	.0007	.0041	.0156	.0467	.1176	.2621	.5314	.7351
7	0	.6983	.4783	.2097	.0824	.0280	.0078	.0016	.0002	.0000	.0000	.0000
	1	.2573	.3720	.3670	.2471	.1306	.0547	.0172	.0036	.0004	.0000	.0000
	2	.0406	.1240	.2753	.3177	.2613	.1641	.0774	.0250	.0043	.0002	.0000
	3	.0036	.0230	.1147	.2269	.2903	.2734	.1935	.0972	.0287	.0026	.0002
	4	.0002	.0026	.0287	.0972	.1935	.2734	.2903	.2269	.1147	.0230	.0036
	5	.0000	.0002	.0043	.0250	.0774	.1641	.2613	.3177	.2753	.1240	.0406
	6	.0000	.0000	.0004	.0036	.0172	.0547	.1306	.2471	.3670	.3720	.2573
	7	.0000	.0000	.0000	.0002	.0016	.0078	.0280	.0824	.2097	.4783	.6983

n	x	p .05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
8	0	.6634	.4305	.4305	.0576	.0168	.0039	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000
	1	.2793	.3826	.3826	.1977	.0896	.0312	.0079	.0012	.0001	.0000	.0000
	2	.0515	.1488	.1488	.2965	.2090	.1094	.0413	.0100	.0011	.0000	.0000
	3	.0054	.0331	.1468	.2541	.2787	.2187	.1239	.0467	.0092	.0004	.0000
	4	.0004	.0046	.0459	.1361	.2322	.2734	.2322	.1361	.0459	.0046	.0004
	5	.0000	.0004	.0092	.0467	.1239	.2187	.2787	.2541	.1468	.0331	.0054
	6	.0000	.0000	.0011	.0100	.0413	.1094	.2090	.2965	.2936	.1488	.0515
	7	.0000	.0000	.0001	.0012	.0079	.0312	.0896	.1977	.3355	.3826	.2793
	8	.0000	.0000	.0000	.0001	.0007	.0039	.0168	.0576	.1678	.4305	.6634
9	0	.6302	.3874	.1342	.0404	.0101	.0020	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.2985	.3874	.3020	.1556	.0605	.0176	.0035	.0004	.0000	.0000	.0000
	2	.0629	.1722	.3020	.2668	.1612	.0703	.0212	.0039	.0003	.0000	.0000
	3	.0077	.0446	.1762	.2668	.2508	.1641	.0743	.0210	.0028	.0001	.0000
	4	.0006	.0074	.0661	.1715	.2508	.2461	.1672	.0735	.0165	.0008	.0000
	5	.0000	.0008	.0165	.0735	.1672	.2461	.2508	.1715	.0661	.0074	.0006
	6	.0000	.0001	.0028	.0210	.0743	.1641	.2508	.2668	.1762	.0446	.0077
	7	.0000	.0000	.0003	.0039	.0212	.0703	.1612	.2668	.3020	.1722	.0629
	8	.0000	.0000	.0000	.0004	.0035	.0176	.0605	.1556	.3020	.3874	.2985
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0020	.0101	.0404	.1342	.3874	.6302
10	0	.5987	.3487	.1074	.0282	.0060	.0010	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.3151	.3874	.2684	.1211	.0403	.0098	.0016	.0001	.0000	.0000	.0000
	2	.0746	.1937	.3020	.2335	.1209	.0439	.0106	.0014	.0001	.0000	.0000
	3	.0105	.0574	.2013	.2668	.2150	.1172	.0425	.0090	.0008	.0000	.0000
	4	.0010	.0112	.0881	.2001	.2508	.2051	.1115	.0368	.0055	.0001	.0000
	5	.0001	.0015	.0264	.1029	.2007	.2461	.2007	.1029	.0264	.0015	.0001
	6	.0000	.0001	.0055	.0368	.1115	.2051	.2508	.2001	.0881	.0112	.0010
	7	.0000	.0000	.0008	.0090	.0425	.1172	.2150	.2668	.2013	.0574	.0105
	8	.0000	.0000	.0001	.0014	.0106	.0439	.1209	.2335	.3020	.1937	.0746
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0016	.0098	.0403	.1211	.2684	.3874	.3151
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0010	.0060	.0282	.1074	.3487	.5987
11	0	.5688	.3138	.0859	.0198	.0036	.0005	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.3293	.3835	.2362	.0932	.0266	.0054	.0007	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0867	.2131	.2953	.1998	.0887	.0269	.0052	.0005	.0000	.0000	.0000
	3	.0137	.0710	.2215	.2568	.1774	.0806	.0234	.0037	.0002	.0000	.0000
	4	.0014	.0158	.1107	.2201	.2365	.1611	.0701	.0173	.0017	.0000	.0000
	5	.0001	.0025	.0388	.1321	.2207	.2256	.1471	.0566	.0097	.0003	.0000
	6	.0000	.0003	.0097	.0566	.1471	.2256	.2207	.1321	.0388	.0025	.0001
	7	.0000	.0000	.0017	.0173	.0701	.1611	.2365	.2201	.1107	.0158	.0014
	8	.0000	.0000	.0002	.0037	.0234	.0806	.1774	.2568	.2215	.0710	.0137
	9	.0000	.0000	.0000	.0005	.0052	.0269	.0887	.1998	.2953	.2131	.0867
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0007	.0054	.0266	.0932	.2362	.3835	.3293
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0005	.0036	.0198	.0859	.3138	.5688

		p										
n	x	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
12	0	.5404	.2824	.0687	.0138	.0022	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.3413	.3766	.2062	.0712	.0174	.0029	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.0988	.2301	.2835	.1678	.0639	.0161	.0025	.0002	.0000	.0000	.0000
	3	.0173	.0852	.2362	.2397	.1419	.0537	.0125	.0015	.0001	.0000	.0000
	4	.0021	.0213	.1329	.2311	.2128	.1208	.0420	.0078	.0005	.0000	.0000
	5	.0002	.0038	.0532	.1585	.2270	.1934	.1009	.0291	.0033	.0000	.0000
	6	.0000	.0005	.0155	.0792	.1766	.2256	.1766	.0792	.0155	.0005	.0000
	7	.0000	.0000	.0033	.0291	.1009	.1934	.2270	.1585	.0532	.0038	.0002
	8	.0000	.0000	.0005	.0078	.0420	.1208	.2128	.2311	.1329	.0213	.0021
	9	.0000	.0000	.0001	.0015	.0125	.0537	.1419	.2397	.2362	.0852	.0173
	10	.0000	.0000	.0000	.0002	.0025	.0161	.0639	.1678	.2835	.2301	.0988
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0029	.0174	.0712	.2062	.3766	.3413
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0022	.0138	.0687	.2824	.5404
13	0	.5133	.2542	.0550	.0097	.0013	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.3512	.3672	.1787	.0540	.0113	.0016	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.1109	.2448	.2680	.1388	.0453	.0095	.0012	.0001	.0000	.0000	.0000
	3	.0214	.0997	.2457	.2181	.1107	.0349	.0065	.0006	.0000	.0000	.0000
	4	.0028	.0277	.1535	.2337	.1845	.0873	.0243	.0034	.0001	.0000	.0000
	5	.0003	.0055	.0691	.1803	.2214	.1571	.0656	.0142	.0011	.0000	.0000
	6	.0000	.0008	.0230	.1030	.1968	.2095	.1312	.0442	.0058	.0001	.0000
	7	.0000	.0001	.0058	.0442	.1312	.2095	.1968	.1030	.0230	.0008	.0000
	8	.0000	.0000	.0011	.0142	.0656	.1571	.2214	.1803	.0691	.0055	.0003
	9	.0000	.0000	.0001	.0034	.0243	.0873	.1845	.2337	.1535	.0277	.0028
	10	.0000	.0000	.0000	.0006	.0065	.0349	.1107	.2181	.2457	.0997	.0214
	11	.0000	.0000	.0000	.0001	.0012	.0095	.0453	.1388	.2680	.2448	.1109
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0016	.0113	.0540	.1787	.3672	.3512
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0013	.0097	.0550	.2542	.5133
14	0	.4877	.2288	.0440	.0068	.0008	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.3593	.3559	.1539	.0407	.0073	.0009	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.1229	.2570	.2501	.1134	.0317	.0056	.0005	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0259	.1142	.2501	.1943	.0845	.0222	.0033	.0002	.0000	.0000	.0000
	4	.0037	.0349	.1720	.2290	.1549	.0611	.0136	.0014	.0000	.0000	.0000
	5	.0004	.0078	.0860	.1963	.2066	.1222	.0408	.0066	.0003	.0000	.0000
	6	.0000	.0013	.0322	.1262	.2066	.1833	.0918	.0232	.0020	.0000	.0000
	7	.0000	.0002	.0092	.0618	.1574	.2095	.1574	.0618	.0092	.0002	.0000
	8	.0000	.0000	.0020	.0232	.0918	.1833	.2066	.1262	.0322	.0013	.0000
	9	.0000	.0000	.0003	.0066	.0408	.1222	.2066	.1963	.0860	.0078	.0004
	10	.0000	.0000	.0000	.0014	.0136	.0611	.1549	.2290	.1720	.0349	.0037
	11	.0000	.0000	.0000	.0002	.0033	.0222	.0845	.1943	.2501	.1142	.0259
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0005	.0056	.0317	.1134	.2501	.2570	.1229
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0009	.0073	.0407	.1539	.3559	.3593
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0068	.0440	.2288	.4877
15	0	.4633	.2059	.0352	.0047	.0005	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.3658	.3432	.1319	.0305	.0047	.0005	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.1348	.2669	.2309	.0916	.0219	.0032	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000

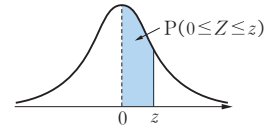
n	x	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
	3	.0307	.1285	.2501	.1700	.0634	.0139	.0016	.0001	.0000	.0000	.0000
	4	.0049	.0428	.1876	.2186	.1268	.0417	.0074	.0006	.0000	.0000	.0000
	5	.0006	.0105	.1032	.2061	.1859	.0916	.0245	.0030	.0001	.0000	.0000
	6	.0000	.0019	.0430	.1472	.2066	.1527	.0612	.0116	.0007	.0000	.0000
	7	.0000	.0003	.0138	.0811	.1771	.1964	.1181	.0348	.0035	.0000	.0000
	8	.0000	.0000	.0035	.0348	.1181	.1964	.1771	.0811	.0138	.0003	.0000
	9	.0000	.0000	.0007	.0116	.0612	.1527	.2066	.1472	.0430	.0019	.0000
	10	.0000	.0000	.0001	.0030	.0245	.0916	.1859	.2061	.1032	.0105	.0006
	11	.0000	.0000	.0000	.0006	.0074	.0417	.1268	.2186	.1876	.0428	.0049
	12	.0000	.0000	.0000	.0001	.0016	.0139	.0634	.1700	.2501	.1285	.0307
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0032	.0219	.0916	.2309	.2669	.1348
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0005	.0047	.0305	.1319	.3432	.3658
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0005	.0047	.0352	.2059	.4633
16	0	.4401	.1853	.0281	.0033	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.3706	.3294	.1126	.0228	.0030	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.1463	.2745	.2111	.0732	.0150	.0018	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0359	.1423	.2463	.1465	.0468	.0085	.0008	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0061	.0514	.2001	.2040	.1014	.0278	.0040	.0002	.0000	.0000	.0000
	5	.0008	.0137	.1201	.2099	.1623	.0667	.0142	.0013	.0000	.0000	.0000
	6	.0001	.0028	.0550	.1649	.1983	.1222	.0392	.0056	.0002	.0000	.0000
	7	.0000	.0004	.0197	.1010	.1889	.1746	.0840	.0185	.0012	.0000	.0000
	8	.0000	.0001	.0055	.0487	.1417	.1964	.1417	.0487	.0055	.0001	.0000
	9	.0000	.0000	.0012	.0185	.0840	.1746	.1889	.1010	.0197	.0004	.0000
	10	.0000	.0000	.0002	.0056	.0392	.1222	.1983	.1649	.0550	.0028	.0001
	11	.0000	.0000	.0000	.0013	.0142	.0666	.1623	.2099	.1201	.0137	.0008
	12	.0000	.0000	.0000	.0002	.0040	.0278	.1014	.2040	.2001	.0514	.0061
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0008	.0085	.0468	.1465	.2463	.1423	.0359
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0018	.0150	.0732	.2111	.2745	.1463
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0030	.0228	.1126	.3294	.3706
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0033	.0281	.1853	.4401
17	0	.4181	.1668	.0225	.0023	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.3741	.3150	.0957	.0169	.0019	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.1575	.2800	.1914	.0581	.0102	.0010	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0415	.1556	.2393	.1245	.0341	.0052	.0004	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0076	.0605	.2093	.1868	.0796	.0182	.0021	.0001	.0000	.0000	.0000
	5	.0010	.0175	.1361	.2081	.1379	.0472	.0081	.0006	.0000	.0000	.0000
	6	.0000	.0039	.0680	.1784	.1839	.0944	.0242	.0026	.0001	.0000	.0000
	7	.0000	.0007	.0267	.1201	.1927	.1484	.0571	.0095	.0004	.0000	.0000
	8	.0000	.0001	.0084	.0644	.1606	.1855	.1070	.0276	.0021	.0000	.0000
	9	.0000	.0000	.0021	.0276	.1070	.1855	.1606	.0644	.0084	.0001	.0000
	10	.0000	.0000	.0004	.0095	.0571	.1484	.1927	.1201	.0267	.0007	.0000
	11	.0000	.0000	.0001	.0026	.0242	.0944	.1839	.1784	.0680	.0039	.0001
	12	.0000	.0000	.0000	.0006	.0081	.0472	.1379	.2081	.1361	.0175	.0010
	13	.0000	.0000	.0000	.0001	.0021	.0182	.0796	.1868	.2093	.0605	.0076
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0052	.0341	.1245	.2393	.1556	.0415
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0010	.0102	.0581	.1914	.2800	.1575

		p										
n	x	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0019	.0169	.0957	.3150	.3741
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0023	.0225	.1668	.4181
18	0	.3972	.1501	.0180	.0016	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.3763	.3002	.0811	.0126	.0012	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.1683	.2835	.1723	.0458	.0069	.0006	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0473	.1680	.2297	.1046	.0246	.0031	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0093	.0700	.2153	.1681	.0614	.0117	.0011	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0014	.0218	.1507	.2017	.1146	.0327	.0045	.0002	.0000	.0000	.0000
	6	.0002	.0052	.0816	.1873	.1655	.0708	.0145	.0012	.0000	.0000	.0000
	7	.0000	.0010	.0350	.1376	.1892	.1214	.0374	.0046	.0001	.0000	.0000
	8	.0000	.0002	.0120	.0811	.1734	.1669	.0771	.0149	.0008	.0000	.0000
	9	.0000	.0000	.0033	.0386	.1284	.1855	.1284	.0386	.0033	.0000	.0000
	10	.0000	.0000	.0008	.0149	.0771	.1669	.1734	.0811	.0120	.0002	.0000
	11	.0000	.0000	.0001	.0046	.0374	.1214	.1892	.1376	.0350	.0010	.0000
	12	.0000	.0000	.0000	.0012	.0145	.0708	.1655	.1873	.0816	.0052	.0002
	13	.0000	.0000	.0000	.0002	.0045	.0327	.1146	.2017	.1507	.0218	.0014
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0011	.0117	.0614	.1681	.2153	.0700	.0093
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0031	.0246	.1046	.2297	.1680	.0473
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0006	.0069	.0458	.1723	.2835	.1633
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0012	.0126	.0811	.3002	.3763
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0016	.0180	.1501	.3972
19	0	.3774	.1351	.0144	.0011	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.3774	.2852	.0685	.0093	.0008	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.1787	.2852	.1540	.0358	.0046	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0533	.1796	.2182	.0869	.0175	.0018	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0112	.0798	.2182	.1491	.0467	.0074	.0005	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0018	.0266	.1636	.1916	.0933	.0222	.0024	.0001	.0000	.0000	.0000
	6	.0002	.0069	.0955	.1916	.1451	.0518	.0085	.0005	.0000	.0000	.0000
	7	.0000	.0014	.0443	.1525	.1797	.0961	.0237	.0022	.0000	.0000	.0000
	8	.0000	.0002	.0166	.0981	.1797	.1442	.0532	.0077	.0003	.0000	.0000
	9	.0000	.0000	.0051	.0514	.1464	.1762	.0976	.0220	.0013	.0000	.0000
	10	.0000	.0000	.0013	.0220	.0976	.1762	.1464	.0514	.0051	.0000	.0000
	11	.0000	.0000	.0003	.0077	.0532	.1442	.1797	.0981	.0166	.0002	.0000
	12	.0000	.0000	.0000	.0022	.0237	.0961	.1797	.1525	.0443	.0014	.0000
	13	.0000	.0000	.0000	.0005	.0085	.0518	.1451	.1916	.0955	.0069	.0002
	14	.0000	.0000	.0000	.0001	.0024	.0222	.0933	.1916	.1636	.0266	.0018
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0005	.0074	.0467	.1491	.2182	.0798	.0112
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0018	.0175	.0869	.2182	.1796	.0533
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0046	.0358	.1540	.2852	.1787
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0008	.0093	.0685	.2852	.3774
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.00001	.0011	.0144	.1351	.3774
20	0	.3585	.1216	.0115	.0008	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.3774	.2702	.0576	.0068	.0005	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.1887	.2852	.1369	.0278	.0031	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0596	.1901	.2054	.0716	.0123	.0011	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

n	x	p: .05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
	4	.0133	.0898	.2182	.1304	.0350	.0046	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0022	.0319	.1746	.1789	.0746	.0148	.0013	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.0003	.0089	.1091	.1916	.1244	.0370	.0049	.0002	.0000	.0000	.0000
	7	.0000	.0020	.0545	.1643	.1659	.0739	.0146	.0010	.0000	.0000	.0000
	8	.0000	.0004	.0222	.1144	.1797	.1201	.0355	.0039	.0001	.0000	.0000
	9	.0000	.0001	.0074	.0654	.1597	.1602	.0710	.0120	.0005	.0000	.0000
	10	.0000	.0000	.0020	.0308	.1171	.1762	.1171	.0308	.0020	.0000	.0000
	11	.0000	.0000	.0005	.0120	.0710	.1602	.1597	.0654	.0074	.0001	.0000
	12	.0000	.0000	.0001	.0039	.0355	.1201	.1797	.1144	.0222	.0004	.0000
	13	.0000	.0000	.0000	.0010	.0146	.0739	.1659	.1643	.0545	.0020	.0000
	14	.0000	.0000	.0000	.0002	.0049	.0370	.1244	.1916	.1091	.0089	.0003
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0013	.0148	.0746	.1789	.1746	.0319	.0022
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0046	.0350	.1304	.2182	.0898	.0133
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0011	.0123	.0716	.2054	.1901	.0596
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0031	.0278	.1369	.2852	.1887
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0005	.0068	.0576	.2702	.3774
	20	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0008	.0115	.1216	.3585
21	0	.3406	.1094	.0092	.0006	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.3764	.2553	.0484	.0050	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.1981	.2837	.1211	.0215	.0020	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0660	.1996	.1917	.0585	.0086	.0006	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0156	.0998	.2156	.1128	.0259	.0029	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0028	.0377	.1833	.1643	.0588	.0097	.0007	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.0004	.0112	.1222	.1878	.1045	.0259	.0027	.0001	.0000	.0000	.0000
	7	.0000	.0027	.0655	.1725	.1493	.6554	.0087	.0005	.0000	.0000	.0000
	8	.0000	.0005	.0286	.1294	.1742	.0970	.0229	.0019	.0000	.0000	.0000
	9	.0000	.0001	.0103	.0801	.1677	.1402	.0497	.0063	.0002	.0000	.0000
	10	.0000	.0000	.0031	.0412	.1342	.1682	.0895	.0176	.0008	.0000	.0000
	11	.0000	.0000	.0008	.0176	.0895	.1682	.1342	.0412	.0031	.0000	.0000
	12	.0000	.0000	.0002	.0063	.0497	.1402	.1677	.0801	.0103	.0001	.0000
	13	.0000	.0000	.0000	.0019	.0229	.0970	.1742	.1294	.0286	.0005	.0000
	14	.0000	.0000	.0000	.0005	.0087	.0554	.1493	.1725	.0655	.0027	.0000
	15	.0000	.0000	.0000	.0001	.0027	.0259	.1045	.1878	.1222	.0112	.0004
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0007	.0097	.0588	.1643	.1833	.0377	.0028
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0029	.0259	.1128	.2156	.0998	.0156
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0006	.0086	.0585	.1917	.1996	.0660
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0020	.0215	.1211	.2837	.1981
	20	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0050	.0484	.2553	.3764
	21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0006	.0092	.1094	.3406
22	0	.3235	.0985	.0074	.0004	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.3746	.2407	.0406	.0037	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.2070	.2808	.1065	.0166	.0014	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0726	.2080	.1775	.0474	.0060	.0004	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0182	.1098	.2108	.0965	.0190	.0017	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0034	.0439	.1898	.1489	.0456	.0063	.0004	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.0005	.0138	.1344	.1808	.0862	.0178	.0015	.0000	.0000	.0000	.0000

n	x	p .05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
	7	.0001	.0035	.0768	.1771	.1314	.0407	.0051	.0002	.0000	.0000	.0000
	8	.0000	.0007	.0360	.1423	.1642	.0762	.0144	.0009	.0000	.0000	.0000
	9	.0000	.0001	.0140	.0949	.1703	.1186	.0336	.0032	.0001	.0000	.0000
	10	.0000	.0000	.0046	.0529	.1476	.1542	.0656	.0097	.0003	.0000	.0000
	11	.0000	.0000	.0012	.0247	.1073	.1682	.1073	.0247	.0012	.0000	.0000
	12	.0000	.0000	.0003	.0097	.0656	.1542	.1476	.0529	.0046	.0000	.0000
	13	.0000	.0000	.0001	.0032	.0336	.1186	.1703	.0949	.0140	.0001	.0000
	14	.0000	.0000	.0000	.0009	.0144	.0762	.1642	.1423	.0360	.0007	.0000
	15	.0000	.0000	.0000	.0002	.0051	.0407	.1314	.1771	.0768	.0035	.0001
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0015	.0178	.0862	.1808	.1344	.0138	.0005
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0063	.0456	.1489	.1898	.0439	.0034
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0017	.0190	.0965	.2108	.1098	.0182
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0060	.0474	.1775	.2080	.0726
	20	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0014	.0166	.1065	.2808	.2070
	21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0037	.0406	.2407	.3746
	22	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0074	.0985	.3235
23	0	.3074	.0886	.0059	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.3721	.2265	.0339	.0027	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.2154	.2768	.0933	.0127	.0009	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0794	.2153	.1633	.0382	.0041	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0209	.1196	.2042	.0818	.0138	.0011	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0042	.0505	.1940	.1332	.0350	.0040	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.0007	.0168	.1455	.1712	.0700	.0120	.0008	.0000	.0000	.0000	.0000
	7	.0001	.0045	.0883	.1782	.1133	.0292	.0029	.0001	.0000	.0000	.0000
	8	.0000	.0010	.0442	.1527	.1511	.0584	.0088	.0004	.0000	.0000	.0000
	9	.0000	.0002	.0184	.1091	.1679	.0974	.0221	.0016	.0000	.0000	.0000
	10	.0000	.0000	.0064	.0655	.1567	.1364	.0464	.0052	.0001	.0000	.0000
	11	.0000	.0000	.0019	.0332	.1234	.1612	.0823	.0142	.0005	.0000	.0000
	12	.0000	.0000	.0005	.0142	.0823	.1612	.1234	.0332	.0019	.0000	.0000
	13	.0000	.0000	.0001	.0052	.0464	.1364	.1567	.0655	.0064	.0000	.0000
	14	.0000	.0000	.0000	.0016	.0221	.0974	.1679	.1091	.0184	.0002	.0000
	15	.0000	.0000	.0000	.0004	.0088	.0584	.1511	.1527	.0442	.0010	.0000
	16	.0000	.0000	.0000	.0001	.0029	.0292	.1133	.1782	.0883	.0045	.0001
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0008	.0120	.0700	.1712	.1455	.0168	.0007
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0040	.0350	.1332	.1940	.0505	.0042
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0011	.0138	.0818	.2042	.1196	.0209
	20	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0041	.0382	.1633	.2153	.0794
	21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0009	.0127	.0933	.2768	.2154
	22	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0027	.0339	.2265	.3721
	23	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0059	.0886	.3074
24	0	.2920	.0798	.0047	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.3688	.2127	.0283	.0020	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.2232	.2718	.0815	.0097	.0006	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0862	.2215	.1493	.0305	.0028	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0238	.1292	.1960	.0687	.0099	.0006	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

n	x	.05	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90	.95
	5	.0050	.0574	.1960	.1177	.0265	.0025	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.0008	.0202	.1552	.1598	.0560	.0080	.0004	.0000	.0000	.0000	.0000
	7	.0001	.0058	.0998	.1761	.0960	.0206	.0017	.0000	.0000	.0000	.0000
	8	.0000	.0014	.0530	.1604	.1360	.0438	.0053	.0002	.0000	.0000	.0000
	9	.0000	.0003	.0236	.1222	.1612	.0779	.0141	.0003	.0000	.0000	.0000
	10	.0000	.0000	.0088	.0785	.1612	.1169	.0318	.0026	.0000	.0000	.0000
	11	.0000	.0000	.0028	.0428	.1367	.1488	.0608	.0079	.0002	.0000	.0000
	12	.0000	.0000	.0008	.0199	.0988	.1612	.0988	.0199	.0008	.0000	.0000
	13	.0000	.0000	.0002	.0079	.0608	.1488	.1367	.0428	.0028	.0000	.0000
	14	.0000	.0000	.0000	.0026	.0318	.1169	.1612	.0785	.0088	.0000	.0000
	15	.0000	.0000	.0000	.0008	.0141	.0779	.1612	.1222	.0236	.0003	.0000
	16	.0000	.0000	.0000	.0002	.0053	.0438	.1360	.1604	.0530	.0014	.0000
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0017	.0206	.0960	.1761	.0998	.0058	.0001
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0080	.0560	.1598	.1552	.0202	.0008
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0025	.0265	.1177	.1960	.0574	.0050
	20	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0006	.0099	.0687	.1960	.1292	.0238
	21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0028	.0305	.1493	.2215	.0862
	22	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0006	.0097	.0815	.2718	.2232
	23	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0020	.0283	.2127	.3688
	24	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0047	.0798	.2920
25	0	.2774	.0718	.0038	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	1	.3650	.1994	.0236	.0014	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	2	.2305	.2659	.0708	.0074	.0004	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	3	.0930	.2265	.1358	.0243	.0019	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	4	.0269	.1384	.1867	.0572	.0071	.0004	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	5	.0060	.0646	.1960	.1030	.0199	.0016	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	6	.0010	.0239	.1633	.1472	.0442	.0053	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000
	7	.0001	.0072	.1108	.1712	.0800	.0143	.0009	.0000	.0000	.0000	.0000
	8	.0000	.0018	.0623	.1651	.1200	.0322	.0031	.0001	.0000	.0000	.0000
	9	.0000	.0004	.0294	.1336	.1511	.0609	.0088	.0004	.0000	.0000	.0000
	10	.0000	.0001	.0118	.0916	.1612	.0974	.0212	.0013	.0000	.0000	.0000
	11	.0000	.0000	.0040	.0536	.1465	.1328	.0434	.0042	.0001	.0000	.0000
	12	.0000	.0000	.0012	.0268	.1140	.1550	.0760	.0115	.0003	.0000	.0000
	13	.0000	.0000	.0003	.0115	.0760	.1550	.1140	.0268	.0012	.0000	.0000
	14	.0000	.0000	.0001	.0042	.0434	.1328	.1465	.0536	.0040	.0000	.0000
	15	.0000	.0000	.0000	.0013	.0212	.0974	.1612	.0916	.0118	.0001	.0000
	16	.0000	.0000	.0000	.0004	.0088	.0609	.1511	.1336	.0294	.0004	.0000
	17	.0000	.0000	.0000	.0001	.0031	.0322	.1200	.1651	.0623	.0018	.0000
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0009	.0143	.0800	.1712	.1108	.0072	.0001
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0053	.0442	.1472	.1633	.0239	.0010
	20	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0016	.0199	.1030	.1960	.0646	.0060
	21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0071	.0572	.1867	.1384	.0269
	22	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0019	.0243	.1358	.2265	.0930
	23	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0074	.0708	.2659	.2305
	24	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0014	.0236	.1994	.3650
	25	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0038	.0718	.2774

표준정규분포표

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4980	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4983	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997

난수표(1)

41	10	50	81	22	94	80	71	10	68	23	58	20	21	88	71	29	54	42	84
13	49	57	94	72	78	92	78	78	04	17	00	92	85	09	52	78	15	96	97
33	87	89	24	77	65	37	12	38	63	76	49	69	52	36	11	03	58	23	39
15	91	02	97	10	37	14	47	47	79	81	63	34	22	84	89	77	54	40	37
37	94	89	58	24	29	22	39	42	66	95	14	63	40	46	93	99	89	97	80

48	06	32	88	07	06	19	13	11	04	45	95	73	13	19	11	39	24	24	05
92	65	65	69	32	05	63	75	76	57	26	10	31	31	63	77	83	07	31	14
48	66	49	80	78	34	30	47	61	73	44	31	65	38	69	89	46	83	54	40
23	50	07	82	24	34	88	84	90	39	20	46	32	85	66	22	13	24	41	02
47	02	38	86	81	59	77	46	17	55	54	59	00	99	03	16	34	25	39	50

39	65	34	38	46	26	95	15	80	70	40	06	89	76	54	89	61	27	75	66
90	36	99	74	53	71	05	53	69	01	49	59	53	06	18	52	03	18	40	26
46	60	38	92	08	09	16	06	33	02	13	60	78	83	82	17	16	30	55	71
62	67	74	04	84	75	68	64	11	42	22	88	64	73	77	28	54	94	71	69
21	17	44	02	71	21	59	79	73	18	24	74	77	48	02	32	62	21	14	53

26	28	51	07	60	06	70	82	54	15	47	32	68	27	57	25	93	34	46	17
42	52	33	74	19	92	15	67	44	50	18	71	98	10	65	85	25	63	55	29
01	75	61	32	64	82	26	07	52	58	20	62	50	46	31	25	96	08	42	07
40	43	01	08	73	95	03	72	60	57	11	01	09	16	29	01	43	35	12	89
27	45	34	33	89	67	15	09	44	52	97	29	56	42	65	86	53	36	40	06

70	14	67	62	53	35	13	44	94	15	40	73	62	93	59	85	82	75	98	57
08	19	27	74	15	08	70	74	65	24	48	86	89	31	25	93	37	34	82	89
53	49	10	30	07	77	96	85	15	91	44	39	40	04	22	43	98	84	41	37
52	15	45	85	55	73	68	49	91	91	93	09	46	39	60	04	61	98	28	27
47	08	84	16	05	08	28	75	64	30	96	01	45	66	88	19	99	94	90	85

난수표(2)

78 43 59 09 76	15 94 47 91 66	87 06 27 17 01	41 53 62 92 05
47 81 65 81 44	55 51 93 25 07	45 90 65 29 04	65 96 22 29 43
97 58 79 03 26	64 90 92 12 81	31 98 39 17 26	86 58 83 63 61
71 65 41 00 66	93 35 75 01 93	35 02 54 23 10	77 51 07 01 36
95 32 29 52 75	52 40 80 62 69	87 82 21 74 40	38 96 39 91 55
23 04 50 65 50	51 74 29 63 42	22 31 29 09 67	36 50 22 72 51
26 06 28 45 33	65 24 99 31 28	25 10 50 24 14	66 90 92 69 09
78 07 92 28 26	52 98 10 30 39	73 67 88 59 04	49 27 67 66 27
55 23 92 23 45	86 34 10 70 32	87 38 39 12 78	30 05 43 07 57
02 03 48 05 22	16 42 81 95 86	03 27 69 40 75	39 95 14 26 45
80 29 84 54 35	31 32 42 70 52	14 80 27 24 21	32 08 27 21 49
26 74 75 11 09	60 30 70 35 46	74 09 36 06 17	06 16 50 71 00
20 33 24 23 65	38 12 97 82 81	22 29 43 17 11	30 58 95 48 19
67 54 61 23 82	95 56 92 91 81	62 73 85 72 72	35 82 56 60 99
19 88 09 94 94	08 24 06 27 68	89 62 06 29 94	72 56 69 93 83
01 15 99 64 85	58 89 90 04 44	70 82 60 20 17	31 49 32 57 23
54 17 63 28 38	49 86 53 48 22	93 01 58 53 38	73 95 53 46 27
57 45 80 76 20	74 53 06 01 05	96 20 85 91 44	82 83 57 31 70
50 77 14 35 44	69 74 04 78 04	13 12 83 51 04	33 76 44 98 83
45 14 72 12 69	15 06 16 84 92	63 17 99 31 40	24 97 70 48 45
31 87 82 71 51	61 99 55 74 61	76 98 54 59 65	91 49 86 21 59
26 54 62 54 05	32 12 09 85 60	54 62 80 56 49	45 33 02 59 70
21 07 99 87 36	14 16 86 79 18	00 54 23 54 14	12 53 82 36 86
08 05 67 48 84	97 95 54 81 89	33 11 43 75 92	17 47 51 86 92
72 59 04 73 24	24 67 26 00 26	70 73 83 67 14	24 51 95 26 68

사진 자료 출처

http://www.imageclick.co.kr/

17쪽 달 30쪽 암모나이트 화석 41쪽 관측 43쪽 천상열차분야지도
57쪽 산성비 60쪽 트랙 74쪽 세포

http://www.topicphoto.com/

14쪽 태양계 20쪽 부작란도 49쪽 빈 병 67쪽 종합 운동장
84쪽 색연필 112쪽 혈압 측정기 122쪽 파이프 136쪽 비 가림 통로

http://www.timespace.co.kr/

8쪽 반도체 산업 98쪽 철새

http://www.yonhapnews.co.kr/

88쪽 수영 105쪽 대학 수학 능력 시험

http://www.newsbank.com/

94쪽 안타

http://pro.corbis.com/

119쪽 루스벨트 119쪽 랜든

http://www.shutterstock.com/

135쪽 상점

인용 자료 출처

"수학 비타민" 박경미, 중앙M&B, 2003, 61쪽
KSA3151 난수표, 197쪽, 198쪽

지 은 이 약 력

이강섭
서울대학교 사범대학 수학교육과 졸업
서울대학교 대학원 계산통계학과 졸업(이학 박사)
제6차, 제7차 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
단국대학교 기획실장, 사범대학 학장
2006년 개정 교육과정 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
(현) 단국대학교 사범대학 수학교육과 교수
한국수학교육학회 회장
(현) 한국수학교육학회 명예 회장

왕규채
서울대학교 사범대학 수학교육과 졸업
단국대학교 교육대학원 수학교육과 졸업(교육학 석사)
제7차 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
2006년 개정 교육과정 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
신월중, 영등포여고, 구일고, 구정고, 석관고, 성동고 교사
(현) 서울과학고등학교 교사

송교식
서울대학교 사범대학 수학교육과 졸업
서울대학교 사범대학원 수학교육과 졸업(교육학 석사)
제7차 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
2006년 개정 교육과정 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
선린중, 석관고, 청담고, 한성과학고, 용산고 교사
(현) 성동고등학교 교사

양인웅
성균관대학교 사범대학 수학교육과 졸업
성균관대학교 교육대학원 수학교육과 졸업(교육학 석사)
2006년 개정 교육과정 고등학교 수학 교과서 집필(공저)
경동고, 잠실고, 수락고 교사
(현) 경복고등학교 교사

단원별 집필
총괄 진행 이강섭
Ⅰ **명제와 논리** 양인웅
Ⅱ **지수와 로그** 양인웅
Ⅲ **수열** 송교식
Ⅳ **확률과 통계** 이강섭
Ⅴ **도형과 그래프** 왕규채

편집 김영호, 한채윤, 김선향, 우나영, 장자현
디자인 김태원, 박현신, 김의수
삽화 서영철, 유환석, 양승용, 송회석, 토리 디자인
사진 이석원
컷 이미영, 김상준, 김윤아

표지 출처
김상구/Kim Sang-ku/No.893/46×61 cm/2004

교육과학기술부의 위탁을 받아 **한국교육과정평가원**이 검정 심사를 하였음.

고등학교 수학의 활용 익힘책

2010. 3. 1. 초판 발행　2011. 3. 1. 2쇄 발행　정가　원

지은이　이강섭 외 3인
발행인　(주) 지학사　서울특별시 마포구 동교동 180-20
인쇄인

내용관련문의　(주)지학사　수학부　전화 02-330-5440　전송 02-325-8009
발행업무대행　사단법인 한국검정교과서　서울특별시 강서구 등촌동 657-3 기도빌딩 4~5F
개별구입안내　홈페이지 주소　www.ktbook.com　02-3663-5409~12